سامانه بانک تستی

FlowRax

ریاضی

Math

@Flow_KonKour

@LoPRax_KonKour

کلیک کن و با ما همراه شو!

۱

شرط پیوستگی f در $x = ۳$، آن است که $\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} f(x) = f(۳)$

پس:

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = f(۳) = \left|۳ - \frac{۳a}{۲}\right|$$

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = |۳ - a|$$

پس:

$$\left|۳ - \frac{۳a}{۲}\right| = |۳ - a| \Rightarrow \begin{cases} ۳ - \frac{۳a}{۲} = ۳ - a \to a = ۰ \\ ۳ - \frac{۳}{۲}a = a - ۳ \to a = ۲/۴ \end{cases}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲

تابع به شرطی در $x = ۲$، دارای حد است که حد چپ و حد راست تابع در این نقطه موجود و با هم برابر باشند.

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = ۱۶ - k$$

زیرا:

$$x > ۲ \Rightarrow \begin{cases} ۲x > ۴ \to [۲x] = ۴ \\ \frac{۱}{x} < \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۴}{x} < ۲ \Rightarrow \left[\frac{۴}{x}\right] = ۱ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = ۹ - k \times ۲ = ۹ - ۲k$$

زیرا:

$$x < ۲ \Rightarrow \begin{cases} x < ۲ \Rightarrow ۲x < ۴ \Rightarrow [۲x] = ۳ \\ \frac{۱}{x} > \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۴}{x} > ۲ \Rightarrow \left[\frac{۴}{x}\right] = ۲ \end{cases}$$

$$۱۶ - k = ۹ - ۲k \Rightarrow k = -۷$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳

دقت کنید:

$$x \to -۱^- \Rightarrow \begin{cases} [x] = -۲ \\ [-x] = ۱ \end{cases}$$

با این مقدمه، مقدار حد را بدست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to -۱^-} \frac{|x+۱| - ۲[x]}{[-x] - |۲x|} = \lim_{x\to -۱^-} \frac{۰ - ۲\times -۲}{۱ - ۲} = \frac{۴}{-۱} = -۴$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴

ضابطهٔ اول به شرطی در $x=۰$ پیوسته است که $b+x$ برابر صفر باشد:

$$b+x=۰ \xrightarrow{x=۰} b=۰$$

حال پیوستگی تابع را در نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ بررسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱) \Rightarrow ۲a+m+۳=a+۰ \Rightarrow a+m=-۳ \\ \lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=f(-۱) \Rightarrow ۲a-m+۳=-a+۱ \Rightarrow ۳a-m=-۲ \end{cases} \rightarrow a=\frac{-۵}{۴} \rightarrow m=\frac{-۷}{۴}$$

با حل دستگاه دو معادله و دو مجهولی بالا، $m=-\frac{۷}{۴}$ به دست می‌آید.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵

فرض کنید $\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=L$ ، در این صورت:

$$\lim_{x\to ۳}\left(f^۲(x)-۴f(x)\right)=L^۲-۴L=-۴ \Rightarrow L^۲-۴L+۴=۰ \Rightarrow (L-۲)^۲=۰ \Rightarrow L=۲$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲+۱}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to ۳}(x^۲+۱)}{\lim\limits_{x\to ۳} f(x)}=\frac{۹+۱}{۲}=۵$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶

حد چپ و حد راست تابع f را در نقطهٔ $x=k\in\mathbb{Z}$ حساب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to k^+} f(x)=\lim_{x\to k^+}\left(\frac{k}{x}+(-k-۱)x\right)=\frac{k}{k}+k(-k-۱)=-k^۲-k+۱$$

$$\lim_{x\to k^-} f(x)=\lim_{x\to k^-}\left(\frac{k-۱}{x}-kx\right)=\frac{k-۱}{k}-k^۲=\frac{k-۱-k^۳}{k}$$

برای اینکه تابع f در نقطهٔ $x=k$ حد داشته باشد، باید حد چپ و حد راست آن در این نقطه برابر باشند. پس:

$$-k^۲-k+۱=\frac{k-۱-k^۳}{k} \Rightarrow -\cancel{k^۲}-k^۲+k=k-۱-\cancel{k^۲} \Rightarrow k^۲=۱ \Rightarrow k=\pm ۱$$

پس تابع f فقط در نقاط صحیح $x=۱$ و $x=-۱$ حد دارد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷

توجه کنید که:

$$\frac{۱}{x}f(x)f\left(\frac{۲}{x}\right)=\frac{۱}{x}\times\frac{۴x-۱}{x^۳-۶x}\times\frac{۴\times\frac{۲}{x}-۱}{\left(\frac{۲}{x}\right)^۳-۶\left(\frac{۲}{x}\right)}=\frac{۴x-۱}{x^۴-۶x^۲}\times\frac{\frac{۸}{x}-۱}{\frac{۸}{x^۳}-\frac{۱۲}{x}}=\frac{۴x-۱}{x^۴-۶x^۲}\times\frac{۸x^۲-x^۳}{۸-۱۲x^۲}=\frac{(۴x-۱)(۸-x)}{(x^۲-۶)(۸-۱۲x^۲)}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{x}f(x)f\left(\frac{۲}{x}\right)\right)=\lim_{x\to ۰}\frac{(۴x-۱)(۸-x)}{(x^۲-۶)(۸-۱۲x^۲)}=\frac{-۱\times ۸}{-۶\times ۸}=\frac{۱}{۶}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸

$$L_1 = \lim_{x\to -1^+} \frac{|x^2-1|}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-(x^2-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{-(x+1)(x-1)}{x+1} = 2$$

$$L_2 = \lim_{x\to -1^-} \frac{|x|+[-x]}{ax-[x]} = \lim_{x\to -1^-} \frac{|x|+1}{ax-(-2)} = \frac{1+1}{-a+2} = \frac{2}{-a+2} = 2 \Rightarrow a = 1$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹

ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = a(x+1)(x-3) \xrightarrow{(0,-3)} -3 = a(1)(-3) \Rightarrow a = 1$$

حال داریم:

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x)}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-3)}{x+1} = \lim_{x\to -1} (x-3) = -4$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰

عبارت را ساده کرده، سپس حد را رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to \frac{5\pi}{4}^+} \frac{\sqrt{1-2\sin x\cos x}}{\sin x+\sin(x-\frac{\pi}{2})} = \lim_{x\to \frac{5\pi}{4}^+} \frac{\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}}{\sin x-\cos x} = \lim_{x\to \frac{5\pi}{4}^+} \frac{|\sin x-\cos x|}{\sin x-\cos x} = \lim_{x\to \frac{5\pi}{4}^+} \frac{-(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x} = -1$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱

حد مخرج کسر برابر صفر است، بنابراین حد صورت کسر نیز باید صفر باشد تا حاصل حد عددی حقیقی شود.

$$x^2+|x-1|+a = 0 \xrightarrow{x=1} 1+0+a = 0 \Rightarrow a = -1$$

خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+|x-1|-1}{\sqrt{6(x^2-1)(x^3-1)}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-(x-1)-1}{\sqrt{6(x-1)\underbrace{(x+1)}_{2}(x-1)\underbrace{(x^2+x+1)}_{3}}} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-x}{\sqrt{36(x-1)^2}}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x(x-1)}{6|x-1|} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x(x-1)}{-6(x-1)} = -\frac{1}{6}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲

باید شرط $\lim_{x\to 1} g(x) = g(1)$ را بررسی کنیم.

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \left[-1^+\right] f(1^+) = -(1+1) = -2$$

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \left[-1^-\right] f(1^-) = -2(0+b) = -2b$$

$$g(1) = -f(1) = -(a+b)$$

$$\Rightarrow -2 = -2b = -(a+b) \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳

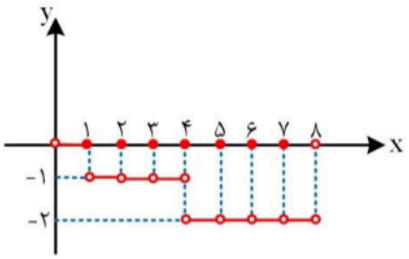
توجه کنید که $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$، پس:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -[\sqrt{x}] & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

از طرف دیگر:

$$0<x<1\Rightarrow 0<\sqrt{x}<1\Rightarrow[\sqrt{x}]=0$$
$$1<x<4\Rightarrow 1<\sqrt{x}<2\Rightarrow[\sqrt{x}]=1$$
$$4<x<8\Rightarrow 2<\sqrt{x}<\sqrt{8}\Rightarrow[\sqrt{x}]=2$$

بنابراین نمودار تابع f روی بازهٔ $(0,8)$ به صورت زیر است:



پس در نقاط $2,3,5,6,7$ تابع f حد دارد ولی پیوسته نیست.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴

ابتدا ضابطهٔ $f(x)$ را بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}|x| & -1<x<1\\ x^3+ax+b & x\geq 1\cup x\leq -1\end{cases}$$

کافی است پیوستگی تابع را در نقاط $x=1$ و $x=-1$ بررسی کنیم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)\Rightarrow 1=1+a+b\Rightarrow a=-b\\ \lim\limits_{x\to -1} f(x)=f(-1)\Rightarrow 1=-1-a+b\Rightarrow b-a=2\end{cases}$$

پس: $b=1$ و $a=-1$ و در نتیجه $2a-b=-3$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵

چون تابع f در نقطهٔ $x=4$ حد دارد پس باید حد چپ و حد راست تابع f در نقطهٔ $x=4$ موجود و برابر باشند.

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^-}\left(a\left[\frac{x}{4}\right]+2ax\left[-\frac{x}{4}\right]-\left[x^2\right]\right)=a\left[1^-\right]+8a\left[-(1^-)\right]-\left[16^-\right]=8a(-1)-15=-8a-15$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=\lim_{x\to 4^+}\left(a\left[\frac{x}{4}\right]+2ax\left[-\frac{x}{4}\right]-\left[x^2\right]\right)=a\left[1^+\right]+8a\left[-(1^+)\right]-\left[16^+\right]=a-16a-16=-15a-16$$

شرط وجود حد: $-8a-15=-15a-16\Rightarrow 7a=-1\Rightarrow a=-\frac{1}{7}$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۶

$$x=-۱ \text{ پیوستگی راست در } \begin{cases} f(-۱)=\left[-\frac{\pi}{۳}\right]+b=-۲+b \\ \lim\limits_{x\to(-۱)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}\frac{|x^۲-۹x+۱۴|}{x^۲-۴x-۲۱}=\frac{|۱+۹+۱۴|}{-۱۶}=\frac{۲۴}{-۱۶}=-\frac{۳}{۲} \\ -۲+b=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow b=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$x=۷ \text{ پیوستگی چپ در } \begin{cases} f(۷)=۲\sin\frac{۷\pi}{۲}-\frac{a}{۷}=-۲-\frac{a}{۷} \\ \lim\limits_{x\to۷^-} f(x)=\lim\limits_{x\to۷^-}\frac{|x^۲-۹x+۱۴|}{x^۲-۴x-۲۱}=\lim\limits_{x\to۷^-}\frac{|(x-۲)(x-۷)|}{(x+۳)(x-۷)} \\ =\lim\limits_{x\to۷^-}\frac{-(x-۲)(x-۷)}{(x+۳)(x-۷)}=\lim\limits_{x\to۷^-}\frac{-(x-۲)}{x+۳}=\frac{-۵}{۱۰}=-\frac{۱}{۲} \\ \Rightarrow -۲-\frac{a}{۷}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{a}{۷}=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow a=-\frac{۲۱}{۲} \end{cases}$$

$$۲b-۴a=۱+۴۲=۴۳$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۷

با توجه به اینکه وتر مثلث قائم‌الزاویه برابر ۲ است، اگر $x\to۱^+$، آن‌گاه $\sin\alpha\to\frac{۱}{۲}^+$ و در نتیجه $\alpha\to\frac{\pi}{۶}^+$ میل می‌کند. بنابراین:

$$\lim_{x\to۱^+}\frac{\sin ۲\alpha}{\cos ۳\alpha}=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{۶}^+}\frac{\sin ۲\alpha}{\cos ۳\alpha}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۰^-}=-\infty$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۸

حاصل حد را رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۵}\frac{\sqrt{۵+\sqrt{۵+۴x}}-\sqrt{۲x}}{x-۵}\times\underbrace{\frac{\sqrt{۵+\sqrt{۵+۴x}}+\sqrt{۲x}}{\sqrt{۵+\sqrt{۵+۴x}}+\sqrt{۲x}}}_{۲\sqrt{۱۰}}=\lim_{x\to۵}\frac{۵-۲x+\sqrt{۵+۴x}}{۲\sqrt{۱۰}(x-۵)}\times\underbrace{\frac{۵-۲x-\sqrt{۵+۴x}}{۵-۲x-\sqrt{۵+۴x}}}_{-۱۰}$$

$$=\lim_{x\to۵}\frac{(۵-۲x)^۲-۵-۴x}{-۲۰\sqrt{۱۰}(x-۵)}=\lim_{x\to۵}\frac{۴x^۲-۲۴x+۲۰}{-۲۰\sqrt{۱۰}(x-۵)}=\lim_{x\to۵}\frac{۴(x-۱)\cancel{(x-۵)}}{-۲۰\sqrt{۱۰}\cancel{(x-۵)}}=\frac{-۴}{۵\sqrt{۱۰}}=\frac{-۴\sqrt{۱۰}}{۵۰}=\frac{-۲\sqrt{۱۰}}{۲۵}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۹

اگر حد، بخواهد موجود باشد، باید صورت کسر نیز به صفر میل کند.

$$\sqrt{۳x+a}-۲=۰\xrightarrow{x=۱}\sqrt{۳+a}=۲\Rightarrow a=۱$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to۱}\frac{\sqrt{۳x+۱}-۲}{x-۱}=\lim_{x\to۱}\frac{۳x+۱-۴}{(x-۱)(\sqrt{۳x+۱}+۲)}=\lim_{x\to۱}\frac{۳}{\sqrt{۳x+۱}+۲}=\frac{۳}{۴}$$

پس $b=\frac{۳}{۴}$ است. حال حد خواسته شده را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to-۱}\frac{\sqrt{bx+b+۱}-۱}{x+۱}=\lim_{x\to-۱}\frac{bx+b+۱-۱}{(x+۱)(\sqrt{bx+b+۱}+۱)}=\lim_{x\to-۱}\frac{b}{\sqrt{bx+b+۱}+۱}=\frac{b}{۲}=\frac{۳}{۸}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۰

$[x]=۲ \Rightarrow ۲ \le x < ۳$

کافی است پیوستگی تابع را در نقاط $x=۲$ و $x=۳$ بررسی کنیم:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)=۴a+۲b \\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=۱۲-a \end{cases} \Rightarrow ۴a+۲b=۱۲-a \Rightarrow ۵a+۲b=۱۲$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=f(۳)=۲۷-a \\ \lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=۹a+۳b \end{cases} \Rightarrow ۲۷-a=۹a+۳b \Rightarrow ۱۰a+۳b=۲۷$$

از حل دستگاه $\begin{cases} ۵a+۲b=۱۲ \\ ۱۰a+۳b=۲۷ \end{cases}$ به جواب $a=۳/۶$ و $b=-۳$ می‌رسیم، پس $a+b=۰/۶$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۱

تابع $\left[\frac{x}{۲}\right]-[x]$ در نقاط صحیح و زوج پیوسته است ولی در نقاط صحیح و فرد ناپیوسته است، پس کافی است $x=۱$ و $x=۳$ ریشه‌های عبارت $x^۲+mx+n=۰$ باشند.

$$x^۲+mx+n=(x-۱)(x-۳)=x^۲-۴x+۳$$
$$\Rightarrow m-n=-۴-۳=-۷$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲

$$\begin{cases} f(x)=۲x+۲a \\ fog(x)=-۴x+۴a \end{cases} \Rightarrow ۲g(x)+۲a=-۴x+۴a \Rightarrow g(x)=-۲x+a$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)-g(x)}{gof(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۴x+a}{-۲(۲x+۲a)+a} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۴x}{-۴x} = -۱$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳

ضابطه تابع وارون را پیدا می‌کنیم و از قضیه پرتوان استفاده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{۲x-۱}{۳x+۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-۲x-۱}{۳x-۲}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-۲x-۱}{۳x-۲}-۲ax}{\frac{۴ax-۱}{۶ax+۲}-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-۶ax^۲+۴ax-۲x-۱}{۳x-۲}}{\frac{۴ax-۱-۶ax^۲-۲x}{۶ax+۲}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-۶ax^۲}{۳x}}{\frac{-۶ax^۲}{۶ax}} = ۲a$$

پس $۲a=۴$ و $a=۲$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴ می‌دانیم برای یافتن باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $(x-a)$ کافی است ریشهٔ مقسوم‌علیه را در عبارت مقسوم قرار دهیم، یعنی باید $p(a)$ را محاسبه کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow p(۲)=a$$
$$x+۴=۰ \Rightarrow x=-۴ \Rightarrow p(-۴)=b$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم بر عبارت $(x^۲+۲x-۸)$، داده شده است. پس خواهیم داشت:

$$p(x)=(x^۲+۲x-۸)Q(x)+(۶x+۹)$$
$$\Rightarrow p(x)=(x-۲)(x+۴)Q(x)+(۶x+۹)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} p(۲)=۲۱ \Rightarrow a=۲۱ \\ p(-۴)=-۱۵ \Rightarrow b=-۱۵ \end{cases} \Rightarrow a-b=۲۱-(-۱۵)=۳۶$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵

$$\text{اگر } n>۴ \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-۴x^۳-۲x^۴+۶x^n}{۳x^n+۷x^۳-۱۱x^۲+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۶x^n}{۳x^n}=۲$$

$$\text{اگر } n=۴ \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-۴x^۳-۲x^۴+۶x^n}{۳x^n+۷x^۳-۱۱x^۲+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x^۴}{۳x^۴}=\frac{۴}{۳}$$

$$\text{اگر } n=۳ \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-۴x^۳-۲x^۴+۶x^n}{۳x^n+۷x^۳-۱۱x^۲+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۲x^۴}{۱۰x^۳}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{۲}{۱۰}x=+\infty$$

$$\text{اگر } n\le ۲ \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{۲x-۴x^۳-۲x^۴+۶x^n}{۳x^n+۷x^۳-۱۱x^۲+۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۲x^۴}{۷x^۳}=\lim_{x\to-\infty}-\frac{۲}{۷}x=+\infty$$

پس حاصل حد نمی‌تواند برابر $-\infty$ شود.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{[\cos x]}{\sin x-\sin^۲ x}=\lim_{x\to(\frac{\pi}{۲})^+}\frac{[\cos x]}{\sin x(۱-\sin x)}=\frac{[\,.^-\,]}{۱\times(.^+)}=\frac{-۱}{.^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}x^۲\left[\frac{۱}{x^۲}\right]=+\infty[\,.^+\,]=(+\infty)\times(\text{صفر مطلق})=۰$$

پس جواب به صورت $-\infty$ و صفر است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+}\frac{\tan^۴ x-۱}{\sqrt{۱+\cos ۴x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+}\frac{\frac{\sin^۴ x}{\cos^۴ x}-۱}{\sqrt{۲\cos^۲ ۲x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+}\frac{\frac{\sin^۴ x-\cos^۴ x}{\cos^۴ x}}{\sqrt{۲}|\cos ۲x|}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+}\frac{(\sin^۲ x-\cos^۲ x)(\sin^۲ x+\cos^۲ x)}{\cos^۴ x\times\sqrt{۲}(-\cos ۲x)}$$

توجه شود که چون $x\to\frac{\pi}{۴}^+$، پس $۲x\to\frac{\pi}{۲}^+$، بنابراین $\cos ۲x$ عددی منفی است، به همین دلیل به صورت قرینه از قدرمطلق خارج می‌شود.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+}\frac{(-\cos ۲x)\times۱}{\cos^۴ x\times\sqrt{۲}\times(-\cos ۲x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^+}\frac{۱}{\sqrt{۲}\cos^۴ x}=\frac{۱}{\sqrt{۲}\times(\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۴}=\frac{۱}{\sqrt{۲}\times\frac{۱}{۴}}=\frac{۴}{\sqrt{۲}}=۲\sqrt{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۸ چون f تابعی خطی است پس به شکل کلی $f(x)=ax+b$ است. از طرفی، چون تابع وارون تابع f از نقطهٔ $B(-۲,-۱)$ می‌گذرد، پس تابع f از نقطهٔ $B'(-۱,-۲)$ می‌گذرد. بنابراین معادلهٔ تابع f را که از دو نقطهٔ $A(۱,۴)$ و $B'(-۱,-۲)$ می‌گذرد، به دست می‌آوریم:

$$\text{شیب خط } m=\frac{۴+۲}{۱+۱}=۳ \Rightarrow \text{معادلهٔ تابع } f: y-۴=۳(x-۱) \Rightarrow y=۳x+۱ \Rightarrow x=\frac{y-۱}{۳} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۱}{۳}=\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|f(x)|+x}{f^{-۱}(x)+|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|۳x+۱|+x}{\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}+|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۳x-۱+x}{\frac{۱}{۳}x-\frac{۱}{۳}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۲x-۱}{-\frac{۲}{۳}x-\frac{۱}{۳}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۲x}{-\frac{۲}{۳}x}=۳$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹ توجه شود که حد چپ تابع $f(x)$ در $x\to(-۱)^-$ دقیقاً برابر ۲ است. (زیرا تابع در بازه $(-۲,-۱)$ تابع ثابت $f(x)=۲$ می‌باشد)، پس حد تابع $f(x)$ در $x\to(-۱)^-$ عدد ۲ مطلق می‌شود، یعنی خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to(-۱)^-} fofof(x)=fof(۲)=f(-۲)=۳$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰ حاصل حد صورت کسر در نقطهٔ $x=۱$ برابر صفر است و حاصل کل حد برابر $\frac{۱}{۲}$ است. پس قطعاً حد مخرج کسر نیز در نقطهٔ $x=۱$ برابر صفر بوده است تا به حالت مبهم $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ تبدیل شده و پس از رفع ابهام، حاصل حد برابر $\frac{۱}{۲}$ شود، از این رو داریم:

$$x=۱ \xrightarrow{\text{جای‌گذاری در مخرج}} ۱+a+b=۰ \Rightarrow b=-۱-a \quad (۱)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to۱}\frac{x^۳-۲x^۲-x+۲}{x^۳+ax-۱-a}=\lim_{x\to۱}\frac{x^۲(x-۲)-(x-۲)}{x^۳-۱+a(x-۱)}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۲)(x^۲-۱)}{(x-۱)(x^۲+x+۱)+a(x-۱)}=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۲)(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)(x^۲+x+۱+a)}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۲)(x+۱)}{x^۲+x+۱+a}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{(-۱)(۲)}{۳+a}=\frac{۱}{۲} \Rightarrow ۳+a=-۴ \Rightarrow a=-۷$$

$$\xrightarrow{(۱)} b=-۱+۷=۶ \Rightarrow ۲a+۳b=۲(-۷)+۳(۶)=۴$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱

$$\lim_{x\to-۳}\frac{۲\sin\frac{\pi}{x}+۱}{۳x^۲+ax+b}=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to-۳}\frac{-\sqrt{۳}+۱}{۳x^۲+ax+b}=-\infty$$

چون حد تابع در $x\to-۳$ هم از چپ و هم از راست برابر $-\infty$ شده است و حد صورت کسر در این نقطه عددی منفی است، پس قطعاً مخرج کسر دارای ریشهٔ مضاعف $x=-۳$ بوده است و چون ضریب $x^۲$ برابر ۳ است، پس مخرج کسر به صورت زیر بوده است:

$$۳x^۲+ax+b=۳(x+۳)^۲ \Rightarrow ۳x^۲+ax+b=۳(x^۲+۶x+۹) \Rightarrow ۳x^۲+ax+b=۳x^۲+۱۸x+۲۷ \Rightarrow a=۱۸\ ,\ b=۲۷$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱۲x-\sqrt{۲ax^۲+۴x+۱}}{bx+|۲-۳x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱۲x-\sqrt{۳۶x^۲+۴x+۱}}{۲۷x+|۲-۳x|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱۲x-|۶x|}{۲۷x+۳x-۲}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱۲x-۶x}{۳۰x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۶x}{۳۰x}=\frac{۱}{۵}=۰/۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲

$$f(x)=\frac{x^۲-۹}{x+۱}\times\frac{x+۴}{x-۳} \Rightarrow \lim_{x\to۳}f(x)=\lim_{x\to۳}\frac{(x-۳)(x+۳)(x+۴)}{(x+۱)(x-۳)}$$

$$\lim_{x\to۳}f(x)=\lim_{x\to۳}\frac{(x+۳)(x+۴)}{x+۱} \Rightarrow \lim_{x\to۳}f(x)=\frac{۶\times۷}{۴}=۱۰/۵$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۳ اگر $x = \log_{۳}^{۲}$ را در حد داده شده جای‌گذاری کنیم، به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم. حال برای رفع ابهام از حد، عامل ابهام را ظاهر کرده و آن را حذف می‌کنیم که برای این کار ابتدا صورت و مخرج کسر را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\log_{۳}^{۲}} \frac{۹^x + ۲(۳^{x+۱}) - ۱۶}{۹^x - ۴} = \lim_{x\to\log_{۳}^{۲}} \frac{(۳^x)^۲ + ۶(۳^x) - ۱۶}{(۳^x)^۲ - ۴} = \lim_{x\to\log_{۳}^{۲}} \frac{(۳^x + ۸)(۳^x - ۲)}{(۳^x + ۲)(۳^x - ۲)}$$

$$= \lim_{x\to\log_{۳}^{۲}} \frac{۳^x + ۸}{۳^x + ۲} = \frac{۳^{\log_{۳}^{۲}} + ۸}{۳^{\log_{۳}^{۲}} + ۲} = \frac{۲+۸}{۲+۲} = \frac{۱۰}{۴} = \frac{۵}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۴

$$f(x) = a(x-۱)^۲ \xrightarrow{(۰,۸)} ۸ = a \Rightarrow f(x) = ۸(x-۱)^۲$$

$$g(x) = mx + h \;;\; m = \frac{-۲-۰}{۰-۱} = ۲ \xrightarrow{(۱,۰)} ۰ = ۲(۱) + h \Rightarrow h = -۲ \Rightarrow g(x) = ۲x - ۲$$

$$\lim_{x\to۱} \frac{f(x)}{g^۲(x)} = \lim_{x\to۱} \frac{۸(x-۱)^۲}{۴(x-۱)^۲} = ۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۵ $f(x)$ بر $x-۲$ و $x+۲$ بخش‌پذیر است. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} f(۲) = ۰ \Rightarrow ۸a + ۴b + ۴ - ۱ = ۰ \\ f(-۲) = ۰ \Rightarrow -۸a + ۴b - ۴ - ۱ = ۰ \end{array}\right\} \xrightarrow{+} ۸b - ۲ = ۰ \Rightarrow b = \frac{۱}{۴} \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-۱$ همان $f(۱)$ می‌باشد.

$$f(۱) = a + b + ۲ - ۱ = -\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + ۱ = \frac{۳}{۴}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۶ در حد داده شده، مخرج کسر به سمت صفر میل می‌کند، بنابراین برای اینکه حاصل حد عددی حقیقی شود، حد صورت کسر نیز باید صفر شود.

$$a - \sin\frac{\pi}{۲} = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

خواهیم داشت:

$$b = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \frac{\sqrt{۱-\sin x}}{\sin\frac{x}{۲} - \cos\frac{x}{۲}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \frac{\sqrt{(\sin\frac{x}{۲} - \cos\frac{x}{۲})^۲}}{\sin\frac{x}{۲} - \cos\frac{x}{۲}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \frac{\left|\sin\frac{x}{۲} - \cos\frac{x}{۲}\right|}{\sin\frac{x}{۲} - \cos\frac{x}{۲}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+} \frac{\sin\frac{x}{۲} - \cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲} - \cos\frac{x}{۲}} = ۱$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} \frac{a-b}{۱-\sin x} = \frac{۰}{۰^+} = ۰$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۷

$$\lim_{x\to 0}\frac{(-1)^{[x]}}{f(x)}$$

① $\begin{cases} x\to 0^+ \Rightarrow \frac{1}{f(0^+)}=\frac{1}{0^+}=+\infty \\ x\to 0^- \Rightarrow \frac{-1}{f(0^-)}=\frac{-1}{0^-}=+\infty \end{cases}$ ×

$$\lim_{x\to -1}\frac{(-1)^{[x]}}{f(x)}$$

② $\begin{cases} x\to (-1)^+ \Rightarrow \frac{-1}{0^-}=+\infty \\ x\to (-1)^- \Rightarrow \frac{1}{0^-}=-\infty \end{cases}$ ×

$$\lim_{x\to 1}\frac{(-1)^{[x]}}{f(x)}$$

③ $\begin{cases} x\to 1^+ \Rightarrow \frac{-1}{0^+}=-\infty \\ x\to 1^- \Rightarrow \frac{1}{0^+}=+\infty \end{cases}$ ×

$$\lim_{x\to 2}\frac{(-1)^{[x]}}{f(x)}$$

④ $\begin{cases} x\to 2^+ \Rightarrow \frac{1}{0^-}=-\infty \\ x\to 2^- \Rightarrow \frac{-1}{0^+}=-\infty \end{cases}$ ✓

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۸

حد تابع $f(x)$ در هر دو طرف $x=2$، $+\infty$ شده است، بنابراین $x=2$ ریشهٔ مضاعف مخرج کسر است.

$$cx^2+bx+a=c(x-2)^2=cx^2-4cx+4c \Rightarrow a=4c$$

خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}=\frac{a}{c}=4$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۹

طبق قضیهٔ پرتوان خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+2x}-\sqrt[3]{x^3+3x^2}}{3-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}-\sqrt[3]{x^3}}{-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|-x}{-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x-x}{-x}=2$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۰

حد مخرج کسر در $x=\frac{3\pi}{4}$ برابر صفر است. برای اینکه جواب حد عددی حقیقی باشد، باید حد صورت نیز برابر صفر شود:

$$\tan\frac{3\pi}{4}+a=0 \Rightarrow -1+a=0 \Rightarrow a=1$$

$$\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\tan x+1}{\cos 2x}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}+1}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\cancel{\sin x+\cos x}}{\cos x(\cos x-\sin x)\cancel{(\cos x+\sin x)}}=\lim_{x\to\frac{3\pi}{4}}\frac{\frac{1}{\cos x}}{\cos x-\sin x}$$

خواهیم داشت:

$$=\frac{\frac{1}{-\frac{\sqrt{2}}{2}}}{-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=1 \Rightarrow b=1$$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+b}{bx+a}=\frac{a}{b}=1$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۱

$$\lim_{x\to(-۱)^-}\left[\frac{۱}{fof(x)}\right]=\left[\frac{۱}{f(f((-۱)^-))}\right]=\left[\frac{۱}{f((-۲)^-)}\right]=\left[\frac{۱}{+\infty}\right]=[۰^+]=۰$$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=[۰^-]=-۱$$

بنابراین حاصل عبارت داده شده $-۱=(-۱)+۰$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۲

$$f(x)=\begin{cases}ax+b & x\le ۰ \text{ یا } x\ge ۲\\ (x^۲+c)[x] & ۰<x<۲\end{cases}$$

می‌دانیم $y=[x]$ در $x=۱$ ناپیوسته است. تنها در حالتی $f(x)$ در $x=۱$ پیوسته است که $x^۲+c=۰$ باشد. $۱+c=۰\Rightarrow c=-۱$

تابع باید در $x=۰$ و $x=۲$ نیز پیوسته باشد.

$$\begin{cases}f(۰^+)\Rightarrow(۰-۱)[۰^+]=۰\\ f(۰^-),f(۰)\Rightarrow ۰+b=b\end{cases}\Rightarrow b=۰$$

$$\begin{cases}f(۲^+),f(۲)\Rightarrow ۲a+b=۲a\\ f(۲^-)\Rightarrow(۴-۱)[۲^-]=۳\end{cases}\Rightarrow ۲a=۳\Rightarrow a=\frac{۳}{۲}$$

خواهیم داشت:

$$ac+b=-\frac{۳}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۳

به کمک قاعده هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to۱}\frac{x^۲-۳\sqrt{x}+۲}{\sqrt{x+۳}-۲}=\frac{۰}{۰}\overset{Hop}{\Rightarrow}\lim_{x\to۱}\frac{۲x-\frac{۳}{۲\sqrt{x}}}{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۴}}=۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۴

چون حاصل حد در $x=۱$ برابر $+\infty$ است، پس مخرج کسر در $x=۱$ ریشهٔ مضاعف دارد.

$$ax^۲+bx-۲=a(x-۱)^۲=ax^۲-۲ax+a\Rightarrow a=-۲,b=۴$$

$$\lim_{x\to۰}\frac{۱-\sqrt[۳]{x+۱}}{-۲+\sqrt{x+۴}}\overset{H}{=}\lim_{x\to۰}\frac{\frac{-۱}{۳\sqrt[۳]{(x+۱)^۲}}}{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۴}}}=\frac{-\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۴}}=-\frac{۴}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۵

$$\lim_{x\to-\infty}f(\frac{۱}{x})+\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=f(۰)+\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{۴x^۲-x+۱}}{x}=f(۰)+\lim_{x\to-\infty}\frac{۲|x|}{x}=۱-۲=-۱$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۶ فرض کنید $g(۰)=f(۰)=a$ باشد:

$$\begin{cases} f(x)=-\frac{a}{۳}x+a \\ g(x)=-\frac{a}{۲}x+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f^{-۱}(x)=\frac{-۳}{a}x+۳ \\ g^{-۱}(x)=-\frac{۲}{a}x+۲ \end{cases}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳fog^{-۱}}{f^{-۱}+g}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳(-\frac{a}{۳}(-\frac{۲}{a}x+۲)+a)}{-\frac{۳}{a}x+۳-\frac{a}{۲}x+a}=\frac{۲}{-\frac{۳}{a}-\frac{a}{۲}}=\frac{-۴a}{a^۲+۶}=-\frac{۴}{۵}$$

$$\Rightarrow a^۲-۵a+۶=۰\Rightarrow a=۲ \text{ یا } a=۳$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۷ توجه کنید که تابع f در $x=۲$ حد چپ و حد راست دارد و مقدار آن‌ها با $f(۲)$ برابر است. پس:

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}\frac{x^۲+ax-۶}{x-۲}=\lim_{x\to۲^+}\frac{(x-۲)(x+۳)}{x-۲}=\lim_{x\to۲^+}(x+۳)=۵$$

همچنین:

$$x^۲+ax-۶=(x-۲)(x+۳)\Rightarrow a=۱$$

از طرف دیگر:

$$\lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}\left(bx+c[x]+x[-x]\right)=۲b+c-۴$$

$$f(۲)=۲b+۲c-۴$$

بنابراین:

$$\begin{cases} ۲b+c-۴=۵ \\ ۲b+۲c-۴=۵ \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=\frac{۹}{۲} \\ c=۰ \end{cases}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۸ چون حاصل حد $-\infty$ شده است، پس $x=\frac{\pi}{۶}$ صفر مخرج است. پس:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^-}(a\sin x+\cos ۲x)=\frac{a}{۲}+\frac{۱}{۲}=۰\Rightarrow a=-۱$$

بنابراین:

$$a\sin x+\cos ۲x=-\sin x+۱-۲\sin^۲ x=(\sin x+۱)(۱-۲\sin x)$$

پس حد موردنظر به صورت مقابل است:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^-}\frac{\frac{\pi}{x}-b}{(\sin x+۱)(۱-۲\sin x)}=-\infty$$

چون علامت مخرج کسر در یک همسایگی چپ نقطهٔ $\frac{\pi}{۶}$ مثبت است، پس علامت صورت کسر در این همسایگی باید منفی باشد، پس:

$$\frac{\pi}{\frac{\pi}{۶}}-b<۰\Rightarrow b>۶$$

پس b شش عدد طبیعی نمی‌تواند باشد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۴۹ توجه کنید که: $f(x)=۸x^۳+۱۲x^۲+۶x=(۲x+۱)^۳-۱$

بنابراین وارون تابع f به صورت زیر است:

$$y=(۲x+۱)^۳-۱\Rightarrow(۲x+۱)^۳=y+۱\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}(\sqrt[۳]{y+۱}-۱)$$

$$f^{-۱}(x)=\frac{\sqrt[۳]{x+۱}-۱}{۲}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[۹]{f(x)}}{\frac{۱}{۲}+f^{-۱}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[۹]{۸x^۳+۱۲x^۲+۶x}}{\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt[۳]{x+۱}-۱}{۲}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲\sqrt[۹]{۸x^۳+۱۲x^۲+۶x}}{\sqrt[۳]{x+۱}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}۲\sqrt[۹]{\frac{۸x^۳+۱۲x^۲+۶x}{(x+۱)^۳}}=\lim_{x\to+\infty}۲\sqrt[۹]{\frac{۸x^۳}{x^۳}}=۲\sqrt[۹]{۸}=۲\sqrt[۳]{۲}=\sqrt[۳]{۱۶}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۰ تابع $y=[x]$ در نقاط صحیح ناپیوسته است. بنابراین در نقاط $x=-۵$ و $x=-۴$ پیوستگی ندارد.

برای این‌که تابع $y=f(x)$ در این بازه پیوسته باشد، $x=-۵$ و $x=-۴$ باید ریشه‌های $x^۲+ax+b=۰$ باشند، یعنی:

$$x^۲+ax+b=(x+۴)(x+۵)=x^۲+۹x+۲۰$$

$$\Rightarrow a=۹\ ,b=۲۰\Rightarrow ۲a-b=-۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۱ از $\lim_{x\to۱^+}\frac{۳x+a}{x+b}=-\infty$ درمی‌یابیم که:

$$۱+b=۰\Rightarrow b=-۱$$

$$\frac{۳+a}{۰^+}=-\infty\Rightarrow a+۳<۰\Rightarrow a<-۳$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{۳x+a}{bx+۱}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{۳x+a}{-x+۱}\right]$$

می‌دانیم $\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x+a}{-x+۱}=-۳$ است. حال باید بررسی کنیم که حاصل کسر از -۳ بیشتر است یا کمتر.

چون $x\to-\infty$ مخرج کسر مثبت و چون $a<-۳$ است، صورت کسر منفی می‌باشد. در نتیجه:

$$\frac{۳x+a}{-x+۱}<۰\Rightarrow\frac{۳x+a}{-x+۱}<-۳$$

خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{۳x+a}{-x+۱}\right]=\left[(-۳)^-\right]=-۴$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۲ **نکته:** $\lim_{x\to x_۰}f(x)=L$، اگر و تنها اگر: $\lim_{x\to x_۰^+}f(x)=\lim_{x\to x_۰^-}f(x)=L$

نکته: شرط وجود حد تابع در $x_۰$ آن است که $f(x)$ در بازهٔ (a,b) شامل $x_۰$ (به‌جز احتمالاً در خود $x_۰$) تعریف شده باشد.

نکته: برای آنکه $\lim_{x\to x_۰^+}f(x)$ موجود باشد، باید $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(x_۰,b)$ تعریف شده باشد.

نکته: برای آنکه $\lim_{x\to x_۰^-}f(x)$ موجود باشد، باید $f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a,x_۰)$ تعریف شده باشد.

با توجه به نکات بالا گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ درست است. گزینهٔ ۳ الزاماً درست نیست؛ زیرا امکان دارد $f(x)$ در خود $x=۱$ تعریف نشده باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۳ نکته: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\ell$ ، اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to x_0^+}=\ell$ و $\lim\limits_{x\to x_0^-}=\ell$

برای اینکه تابع f در $x=۲$ دارای حد باشد، باید حد چپ و راست تابع در این نقطه موجود و با هم برابر باشند:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\left([x+۱]+۲a[x]\right)=۳+۴a\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\left([x+۱]+۲a[x]\right)=۲+۲a\end{cases}\Rightarrow ۳+۴a=۲+۲a\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۴ با جای‌گذاری $x=\frac{\pi}{۴}$ در کسر به حالت $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ می‌رسیم. برای محاسبهٔ حد با توجه به اتحادهای جبری و مثلثاتی کسر را ساده می‌کنیم و حاصل حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{\sin^۲x-\cos^۲x}{\tan x-۱}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}{\frac{\sin x}{\cos x}-۱}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{(\cancel{\sin x-\cos x})(\sin x+\cos x)}{\frac{\cancel{\sin x-\cos x}}{\cos x}}$$

$$=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۵ نکته: اگر برای دو چندجمله‌ای $P(x)$ و $Q(x)$ داشته باشیم $\lim\limits_{x\to x_۰}P(x)=\lim\limits_{x\to x_۰}Q(x)=۰$ ، آنگاه $P(x)$ و $Q(x)$ بر $(x-x_۰)$ بخش‌پذیرند و برای محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to x_۰}\frac{P(x)}{Q(x)}$ ، ابتدا صورت و مخرج را بر $(x-x_۰)$ تقسیم می‌کنیم و سپس امکان استفاده از قانون تقسیم حدها را بررسی می‌نماییم.

ابتدا دقت کنید که $\lim\limits_{x\to -۳}(x^۲+x-۶)=\lim\limits_{x\to -۳}(x^۲-۹)=۰$ ، پس داریم:

$$\lim_{x\to -۳}\frac{x^۲+x-۶}{x^۲-۹}=\lim_{x\to -۳}\frac{(x+۳)(x-۲)}{(x+۳)(x-۳)}=\lim_{x\to -۳}\frac{x-۲}{x-۳}=\frac{-۵}{-۶}=\frac{۵}{۶}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۶

نکته: $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$

نکته: $\lim\limits_{x\to a}(kf(x))=k\lim\limits_{x\to a}f(x)$

با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\lim_{x\to ۱}(۲f(x)+۳g(x))=۷\Rightarrow ۲\lim_{x\to ۱}f(x)+۳\lim_{x\to ۱}g(x)=۷$$

$$\xrightarrow{\lim\limits_{x\to ۱}f(x)=۵} ۲\times ۵+۳\lim_{x\to ۱}g(x)=۷\Rightarrow ۳\lim_{x\to ۱}g(x)=-۳\Rightarrow \lim_{x\to ۱}g(x)=-۱$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to ۱}((۳x-۱)g(x))=(۳-۱)(-۱)=-۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۷ نکتهٔ ۱: اگر $\ell \in \mathbb{R}$ باشد، $\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=\ell$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x)=\ell$ و $\lim\limits_{x\to x_\circ^-} f(x)=\ell$

نکتهٔ ۲: اگر حد چپ و راست تابع f در نقطهٔ $x=a$ موجود و برابر با هم باشند گوییم تابع f در $x=a$ حد دارد.

نکتهٔ ۳: $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\pm \lim\limits_{x\to a} g(x)$

نکتهٔ ۴: $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim\limits_{x\to a} f(x)\times \lim\limits_{x\to a} g(x)$

نکتهٔ ۵: $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ ، $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$

با توجه به نمودار توابع f و g داریم:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۶\ ,\ \lim_{x\to ۲^-} f(x)=۳\ ,\ \lim_{x\to ۲^-} g(x)=-۲\ ,\ \lim_{x\to ۲^+} g(x)=-۱$$

در بین توابع داده‌شده، فقط تابع $f\times g$ در $x=۲$ دارای حد است، زیرا حد چپ و راست برابر دارد:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+}(f\times g)(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)\times\lim\limits_{x\to ۲^+} g(x)=۶\times(-۱)=-۶\\ \lim\limits_{x\to ۲^-}(f\times g)(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)\times\lim\limits_{x\to ۲^-} g(x)=۳\times(-۲)=-۶\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to ۲}(f\times g)(x)=-۶$$

حد چپ و راست سایر گزینه‌ها برابر نیست.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۸ نکته: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند $(a,x_\circ)$ تعریف شده باشد، حد چپ f در $x_\circ$ برابر عدد ℓ است؛ هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به ℓ نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت چپ به‌قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شو، در این صورت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to x_\circ^-} f(x)=\ell$

به طریق مشابه فرض کنیم f در بازه‌ای مانند $(x_\circ,b)$ تعریف شده باشد، حد راست f در $x_\circ$ برابر عدد ℓ است؛ هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به ℓ نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت راست به‌قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x)=\ell$

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینهٔ ۱: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{|x-۳|}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{x-۳}{x-۳}=۱\\ \lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{|x-۳|}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{۳-x}{x-۳}=-۱\end{cases}$ حد چپ و راست نابرابر دارد.

گزینهٔ ۲: $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^۲-۹}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{(x-۳)(x+۳)}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}(x+۳)=۶$ حد چپ و راست برابر دارد.

گزینهٔ ۳: دامنهٔ تابع $x\leq ۳$ است، پس در $x=۳$ حد راست ندارد؛ اما حد چپ آن در $x=۳$ برابر صفر است.

گزینهٔ ۴: اعداد $۲\leq x<۳$ در دامنهٔ تابع نیست (زیرا $[x]=۲$ و مخرج صفر می‌شود)، پس تابع در $x=۳$ حد چپ ندارد، ولی حد راست آن برابر است با:

$$\lim_{x\to ۳^+}\frac{۱}{[x]-۲}=\frac{۱}{۳-۲}=۱$$

بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۵۹

نکته: $\lim\limits_{x\to x_0} f^n(x) = (\lim\limits_{x\to x_0} f(x))^n$

نکته: $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

نکته: $\lim\limits_{x\to x_0} kf(x) = k \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \quad (k\in\mathbb{R})$

نکته: $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad (\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0)$

ابتدا داریم: $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2 \lim\limits_{x\to 1} g(x)=3 \lim\limits_{x\to 1} h(x)=6 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)=6 \ , \ \lim\limits_{x\to 1} g(x)=3 \ , \ \lim\limits_{x\to 1} h(x)=2$

اکنون با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\lim_{x\to 1} \frac{2xh(x)}{f^2(x)-8g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(2xh(x))}{\lim\limits_{x\to 1}(f^2(x)-8g(x))} = \frac{2(1)(2)}{6^2-8(3)} = \frac{4}{36-24} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۰

نکته: اگر توابع f و g در نقطهٔ $x=a$ حد داشته باشند و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ ، آنگاه داریم:

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \pm L_2$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad (L_2\neq 0)$$

نکته: حد یک تابع چندجمله‌ای در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

ابتدا با توجه به نمودار تابع f داریم:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = 3$$

اکنون با استفاده از نکات بالا داریم:

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2 f(x)-1}{2x+f(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x\to -2} x^2 \times \lim\limits_{x\to -2} f(x) - 1}{\lim\limits_{x\to -2} 2x + \lim\limits_{x\to -2} f(x)} = \frac{(-2)^2\times 3 - 1}{-4+3} = \frac{12-1}{-1} = -11$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۱

چون در $x=a$ تابع تعریف نشده است، $x=a$ باید ریشهٔ مخرج باشد، پس $a=2$. همچنین چون حد تابع در $x=2$ برابر یک عدد حقیقی است، باید حد صورت هم در $x=2$ برابر صفر باشد. بنابراین: $x^2+mx+n=0 \xrightarrow{x=2} 4+2m+n=0 \Rightarrow n=-4-2m$

مقدار حد باید برابر ۵ باشد:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+mx-4-2m}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)+m(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2+m)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2+m) = 4+m = 5$$

$$\Rightarrow m=1 \Rightarrow n=-4-2=-6$$

بنابراین: $a+m-n=2+1+6=9$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۲ نکته: تابع $f(x)$ در $x=a$ پیوسته است، هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{(x^۲-۱)-(x-۱)}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x(x-۱)}{x-۱}=۱$$

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} ۳x^۲+a=۳+a$$

$$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\lim_{x\to ۱^-} f(x)=f(۱) \Rightarrow ۳+a=۱\Rightarrow a=-۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۳ نکته: در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$، اگر $f(a)=g(a)=۰$، نتیجه می‌گیریم که چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x-a)$ بخش‌پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ بر $(x-a)$، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطهٔ a، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

با استفاده از تغییر متغیر $\sqrt{x}=t$ داریم:

$$x\to ۴ \Rightarrow \sqrt{x}\to ۲ \Rightarrow t\to ۲\ ,\ x=t^۲$$

$$\lim_{t\to ۲}\frac{۲t^۲-۳t-۲}{t^۳-۸}=\lim_{t\to ۲}\frac{(t-۲)(۲t+۱)}{(t-۲)(t^۲+۲t+۴)}=\lim_{t\to ۲}\frac{۲t+۱}{t^۲+۲t+۴}=\frac{۵}{۱۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

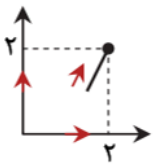
۶۴ نکته: فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند $(a,x_۰)$ تعریف شده باشد. حد چپ f در $x_۰$ برابر عدد ℓ است، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به ℓ نزدیک کرد، به‌شرط آنکه x از سمت چپ به‌قدر کافی به $x_۰$ نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to x_۰^-} f(x)=\ell$

نکته: فرض کنیم f در بازه‌ای مانند $(x_۰,b)$ تعریف‌شده باشد. حد راست f در $x_۰$ برابر عدد ℓ است، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به ℓ نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت راست به‌قدر کافی به $x_۰$ نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to x_۰^+} f(x)=\ell$

حاصل هر کدام از حدها را به‌دست می‌آوریم:

$$x\to \frac{۱}{۲}^+ \Rightarrow \frac{۱}{x}<۲ \Rightarrow \frac{۱}{x}\to ۲^-$$

با توجه به نمودار f وقتی x از مقادیر کمتر از ۲ به آن نزدیک می‌شود، $f(x)$ از مقادیر کمتر از ۲ به آن نزدیک می‌شود؛ یعنی:



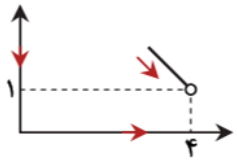
$$x\to ۲^- \Rightarrow f(x)\to ۲^-$$

بنابراین:
$$\lim_{x\to \frac{۱}{۲}^+}\left[f(\frac{۱}{x})\right]=\lim_{x\to ۲^-}\left[f(x)\right]=\left[f(۲^-)\right]=\left[۲^-\right]=۱$$

$$x\to -۲^+ \Rightarrow x^۲<۴ \Rightarrow x^۲\to ۴^-$$

با توجه به نمودار f وقتی x از مقادیر کمتر از ۴ به آن نزدیک می‌شود، $f(x)$ از مقادیر بیشتر از یک به آن نزدیک می‌شود. یعنی:

$$x\to ۴^- \Rightarrow f(x)\to ۱^+$$



بنابراین:
$$\lim_{x\to -۲^+}\left[f(x^۲)\right]=\lim_{x\to ۴^-}\left[f(x)\right]=\left[f(۴^-)\right]=\left[۱^+\right]=۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۵ نکته: تابع f را در نقطهٔ $x=c\,(c\in\mathbb{R})$ پیوسته نامیم، هرگاه: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

ابتدا حد چپ و مقدار تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$x\to ۴^- \Rightarrow -x\to -۴^+ \Rightarrow [-x]=-۴$$

$$\lim_{x\to ۴^-} f(x)=-۴a\ ,\ f(۴)=a[-۴]=-۴a$$

پس:

$$\lim_{x\to ۴^-} f(x)=f(۴)$$

اکنون حد راست تابع را در $x=۴$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۴^+}\frac{\sqrt{\sqrt{x}-۱}-۱}{x-۴}=\lim_{x\to ۴^+}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{x}-۱}-۱}{x-۴}\times\frac{\sqrt{\sqrt{x}-۱}+۱}{\sqrt{\sqrt{x}-۱}+۱}\right)=\lim_{x\to ۴^+}\frac{\sqrt{x}-۱-۱}{x-۴}\times\lim_{x\to ۴^+}\frac{۱}{\sqrt{\sqrt{x}-۱}+۱}$$

$$=\lim_{x\to ۴^+}\frac{\sqrt{x}-۲}{(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۸}$$

با توجه به شرط پیوستگی داریم:

$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=\lim_{x\to ۴^-} f(x)=f(۴)\Rightarrow -۴a=\frac{۱}{۸}\Rightarrow a=-\frac{۱}{۳۲}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۶ نکته: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجه‌اول $(x-a)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-۲$ برابر ۳ است، بنابراین: $f(۲)=۳$

برای پیدا کردن باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x+۲$، کافی است $p(-۲)$ را به‌دست آوریم. بنابراین:

$$p(x)=xf(-x)-۳f(۴+x)\Rightarrow p(-۲)=-۲f(۲)-۳f(۲)=-۵f(۲)\xrightarrow{f(۲)=۳}p(-۲)=-۱۵$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم $p(x)$ بر $x+۲$ برابر -۱۵ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۷ نکته: فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$، در این صورت:

الف) اگر $L>0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

ب) اگر $L>0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

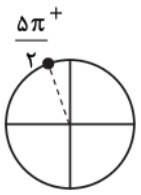
پ) اگر $L<0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

ت) اگر $L<0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$

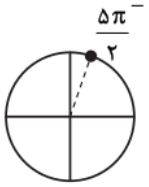
ابتدا ضابطهٔ f را تغییر می‌دهیم و داریم: $f(x)=\dfrac{\tan 3x}{\cot^2 3x}=\tan 3x\times\dfrac{1}{\cot^2 3x}=\tan 3x\times\tan^2 3x=\tan^3 3x=\left(\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}\right)^3$

اکنون حد راست و چپ تابع f را در $x=\dfrac{5\pi}{6}$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to\frac{5\pi}{6}^+}\left(\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\right)^3=\left(\frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{\cos(\frac{5\pi}{2})^+}\right)^3=\frac{1}{0^-}=-\infty$$



$$\lim_{x\to\frac{5\pi}{6}^-}\left(\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\right)^3=\left(\frac{\sin\frac{5\pi}{2}}{\cos(\frac{5\pi}{2})^-}\right)^3=\frac{1}{0^+}=+\infty$$



نمودار



(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۸ نکته: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $(x-a)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ برابر ۳ است. بنابراین $f(2)=3$، پس داریم:

$$f(x)=x^3+ax^2-13\xrightarrow{x=2}f(2)=8+4a-13=3\Rightarrow 4a=8\Rightarrow a=2\Rightarrow f(x)=x^3+2x^2-13$$

طبق رابطهٔ تقسیم در حالت کلی داریم:

$$\begin{array}{c|c} f(x) & x-2 \\ \hline 3 & q(x) \end{array}\quad\Rightarrow f(x)=(x-2)q(x)+3$$

بنابراین:

$$x^3+2x^2-13=(x-2)q(x)+3\quad(1)$$

خواستهٔ سؤال $(qof)(2)=q(f(2))$ است و با توجه به اینکه $f(2)=3$، باید مقدار $q(3)$ را به‌دست آوریم. با توجه به رابطهٔ (۱) داریم:

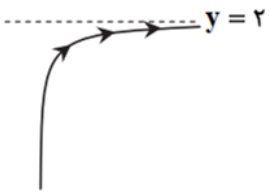
$$(1)\xrightarrow{x=3}27+18-13=(3-2)q(3)+3\Rightarrow q(3)=29\Rightarrow (qof)(2)=29$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۶۹ نکته: فرض کنیم f در یک همسایگی چپ از a تعریف‌شده باشد. رابطهٔ $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد مثبت دلخواه بزرگ‌تر کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر کوچک‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

نکته: اگر تابع f در بازه‌ای مثل $(a,+\infty)$ تعریف‌شده باشد، رابطهٔ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ به این معناست که $f(x)$ را به هر مقدار دلخواه می‌توان به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به‌قدر کافی بزرگ اختیار شود.

با توجه به نمودار $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۲$.



به‌دلیل وجود جزء صحیح باید تشخیص دهیم مقادیر تابع کمتر از ۲ است یا بیشتر از ۲.

با توجه به نمودار وقتی $x\to+\infty$، f با مقادیر کمتر از ۲ به آن نزدیک می‌شود.

بنابراین:

$$\lim_{x\to ۱^-}\big[(fof)(x)\big]=\lim_{x\to+\infty}\big[f(x)\big]=\big[۲^-\big]=۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۰ نکته: در یک تابع گویا مثل $\frac{f}{g}$، اگر $f(a)=g(a)=۰$، نتیجه می‌گیریم که چندجمله‌ای‌های $f(x)$ و $g(x)$ هر دو بر عامل $(x-a)$ بخش‌پذیرند. بنابراین با تقسیم صورت و مخرج کسر بر $(x-a)$، تابع گویای دیگری حاصل می‌شود که حد آن در نقطهٔ a، در صورت وجود با حد $\frac{f}{g}$ در a برابر است.

ابتدا حاصل $\lim\limits_{x\to ۲^+}\big(\big[-x^۲\big]+۳x\big)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x\to ۲^+ \Rightarrow x^۲\to ۴^+$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\big(\big[-x^۲\big]+۳x\big)=\big[-(۴^+)\big]+۶=-۵+۶=۱ \quad (*)$$

$$\lim_{x\to ۲^+}\big(\big[-x^۲\big]+۳x\big)f(x)=۲ \xrightarrow{(*)} \lim_{x\to ۲^+} f(x)=۲$$

در $x=۲$ حد مخرج تابع f برابر صفر است، پس برای اینکه حاصل حد برابر ۲ شود باید حد صورت نیز در $x=۲$ صفر شود. از طرفی صورت باید شکل $a(x-۲)^۲$ باشد تا بعد از خارج شدن از رادیکال حاصل حد متناهی شود. بنابراین:

$$ax^۲+bx+c=a(x-۲)^۲$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=۲ \Rightarrow \lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{a(x-۲)^۲}}{|x-۲|}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{a}\,|x-۲|}{|x-۲|}=\sqrt{a}=۲ \Rightarrow a=۴$$

اکنون داریم:

$$ax^۲+bx+c=a(x-۲)^۲ \xrightarrow{a=۴} ۴x^۲+bx+c=۴x^۲-۱۶x+۱۶ \Rightarrow b=-۱۶\ ,\ c=۱۶ \Rightarrow a\cdot b=-۶۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۱ نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت: $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k)=\lim\limits_{x\to+\infty}ax^n$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}ax^n$

نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$. در این حالت برای محاسبهٔ حد در نقطهٔ a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

ابتدا داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+\sqrt{x^2+12}}{x+2}=1\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax+|x|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-1)x}{x}=1$$

$$\Rightarrow a-1=1\Rightarrow a=2\Rightarrow f(x)=\frac{2x+\sqrt{x^2+12}}{x+2}$$

اکنون حد f را در $x=-2$ به‌دست می‌آوریم و برای این کار صورت و مخرج کسر را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to-2}\left(\frac{2x+\sqrt{x^2+12}}{x+2}\times\frac{2x-\sqrt{x^2+12}}{2x-\sqrt{x^2+12}}\right)=\lim_{x\to-2}\frac{4x^2-x^2-12}{(x+2)(2x-\sqrt{x^2+12})}=\lim_{x\to-2}\frac{3(x+2)(x-2)}{(x+2)(2x-\sqrt{x^2+12})}=\frac{3\times(-4)}{-8}=1/5$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۲ نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k)=\lim_{x\to+\infty}ax^n\ ,\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^n$$

نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$. در این حالت برای محاسبهٔ حد در نقطهٔ a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

با مخرج‌مشترک‌گیری و محاسبهٔ حد، مقادیر a و b را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{ax^2+bx+1}{2x-1}-4x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2+bx+1-8x^2+4x}{2x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-8)x^2+(b+4)x+1}{2x-1}=3$$

حاصل حد برابر عدد است، پس باید صورت عبارتی درجه‌اول باشد، تا صورت و مخرج هم‌درجه باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{cases}a-8=0\Rightarrow a=8\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(b+4)x}{2x}=3\Rightarrow\frac{b+4}{2}=3\Rightarrow b+4=6\Rightarrow b=2\end{cases}$$

اکنون حاصل حد خواسته‌شده را با ضرب صورت و مخرج کسر در مزدوج مخرج به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to2}\left(\frac{2x^2-8}{\sqrt{2x}-2}\times\frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2}\right)=\lim_{x\to2}\frac{2(x^2-4)(\sqrt{2x}+2)}{2x-4}=\lim_{x\to2}\frac{2(x-2)(x+2)(\sqrt{2x}+2)}{2(x-2)}=4\times4=16$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۳ نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k)=\lim_{x\to+\infty}ax^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^n$$

می‌دانیم $[x]$ جزء صحیح عدد x است. اگر $0\le P<1$، آنگاه: $x=[x]+P$ بنابراین $[x]=x-P$ است. اکنون حاصل حد را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+x-P}{\sqrt{4x^2(1+\frac{1}{4x})}+\sqrt[3]{x^3(1-\frac{1}{x^2})}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{|2x|+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{-2x+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{-x}=-4$$

راه‌حل دوم:

نکته: وقتی $x\to\infty$، آنگاه: $x\sim[x]$.

با استفاده از هم‌ارزی پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+x}{\sqrt{4x^2}+\sqrt[3]{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{|2x|+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4x}{-x}=-4$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۴ نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k)=\lim_{x\to+\infty}ax^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^n$$

نکته (قضیه): فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. در این صورت:

الف) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$

ب) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-3x+2)=\lim_{x\to\infty}(\frac{2x^2-bx}{ax+3}-3x+2)=\lim_{x\to\infty}(\frac{2x^2-bx-3ax^2-9x+2ax+6}{ax+3})$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(2-3a)x^2+(-b-9+2a)x+6}{ax+3}=0$$

حاصل حد برابر صفر شده است، پس باید درجهٔ مخرج از صورت بیشتر باشد. چون مخرج درجهٔ اول است، باید در صورت فقط عدد وجود داشته باشد، بنابراین:

$$\begin{cases}2-3a=0 \Rightarrow a=\frac{2}{3}\\ -b-9+2a=0 \Rightarrow -b-9+\frac{4}{3}=0 \Rightarrow b=-\frac{23}{3}\end{cases} \Rightarrow a-b=\frac{25}{3}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۵

نکته: $\sqrt{a^۲}=|a|$

نکته: اگر در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند؛ $P(a)=Q(a)=۰$ باشد، نمی‌توان حاصل حد را با قضایای حد، محاسبه کرد و باید ابتدا $P(x)$ و $Q(x)$ را بر $x-a$ تقسیم کرد و سپس بر $x-a$ ساده کنیم و سپس با قانون تقسیم، حاصل حد را به‌دست می‌آوریم.

ابتدا عبارت مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

$$\sqrt{x^۲+۴x+۴}=\sqrt{(x+۲)^۲}=|x+۲|$$

با توجه به اینکه وقتی $x\to -۲^-$، $x+۲$ منفی است و $|x+۲|=-(x+۲)$، پس داریم:

$$\lim_{x\to -۲^-}\frac{x^۲+۵x+۶}{\sqrt{x^۲+۴x+۴}}=\lim_{x\to -۲^-}\frac{(x+۲)(x+۳)}{-(x+۲)}=\lim_{x\to -۲^-}\frac{x+۳}{-۱}=-۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۶

نکته: تابع f را در نقطهٔ $x=c$ پیوسته می‌گوییم هرگاه:

$$(c\in\mathbb{R})\ .\ \lim_{x\to c}f(x)=f(c)$$

تابع $g(x)=\left[\frac{۱}{۲}x+۱\right]$، در تمام نقاط با طول زوج ناپیوسته است، زیرا اگر x زوج باشد، عبارت داخل جزء صحیح، عددی صحیح می‌شود. در بازهٔ $(-۵,۵)$، اعداد زوج $-۴,-۲,۰,۲,۴$ وجود دارند.

اما تابع f در نقطه‌ای به طول صفر پیوسته است، زیرا عبارت $h(x)=(x^۲-x)$ به‌ازای $x=۰$ برابر با صفر است، پس حد راست، حد چپ و مقدار تابع f در $x=۰$، برابر با صفر است.

بنابراین تابع f در ۴ نقطه با طول‌های ۴، ۲، -۲ و -۴ ناپیوسته است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۷

وقتی که $x\to a$، حد تابع $-\infty$ شده است، پس باید مخرج تابع در $x=a$ ریشهٔ مضاعف داشته باشد. به‌عبارتی مخرج کسر باید به‌صورت $(x-a)^۲$ باشد:

$$x^۲-۲ax+a^۲=x^۲+bx+۲۵\ \Rightarrow\ a^۲=۲۵\ \Rightarrow\ a=\pm۵$$

اکنون به‌ازای $a=۵$ و $a=-۵$ داریم:

$$a=۵\ \Rightarrow\ \lim_{x\to ۵}\frac{x+۳}{(x-۵)^۲}=+\infty\ \Rightarrow$$ $a=۵$ قابل قبول نیست.

$$a=-۵\Rightarrow\lim_{x\to -۵}\frac{x+۳}{(x+۵)^۲}=-\infty\Rightarrow b=۱۰\ ,\ a=-۵\Rightarrow a+b=۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۸ نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = ۰$ ، در این حالت برای محاسبهٔ حد $\frac{f}{g}$ در نقطهٔ a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

نکته: $(x\mp y)(x^۲ \pm xy + y^۲) = x^۳ - y^۳$

با توجه به نکات، داریم:

$$\lim_{x\to ۳^-} \frac{۱-\sqrt[۳]{x-۲}}{\sqrt{(x-۳)^۲}} \times \frac{۱+\sqrt[۳]{x-۲}+\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}}{۱+\sqrt[۳]{x-۲}+\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}} = \lim_{x\to ۳^-} \frac{۱-(x-۲)}{(۱+\sqrt[۳]{x-۲}+\sqrt[۳]{(x-۲)^۲})|x-۳|}$$

$$= \lim_{x\to ۳^-} \frac{۳-x}{(۱+\sqrt[۳]{x-۲}+\sqrt[۳]{(x-۲)^۲})(۳-x)} = \frac{۱}{۳}$$

دقت کنید وقتی $x \to ۳^-$ ، عبارت $x-۳$ ، منفی است و داریم: $|x-۳| = ۳-x$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۷۹ نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x) = ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x\to \pm\infty} (ax^n + bx^{n-۱} + \cdots + k) = \lim_{x\to \pm\infty} ax^n$$

با توجه به فرض سؤال داریم:

$$\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{۳x^۲ + ۲x}{x+۱} + ax\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{(۳+a)x^۲ + (۲+a)x}{x+۱}\right) = b$$

از آنجا که حاصل حد برابر مقداری مشخص است، پس باید درجهٔ صورت و مخرج با هم برابر باشند؛ یعنی $a+۳ = ۰$ ، پس $a = -۳$.

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{-x}{x+۱} = -۱ \Rightarrow b = -۱$$

در نتیجه: $b - a = ۲$.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۰ حد صورت و مخرج کسر تابع f در $x=۲$ برابر صفر است، با تقسیم مخرج بر $x-۲$ داریم:

$$\begin{array}{r|l} x^۳-۳x^۲+۴ & x-۲ \\ \hline -(x^۳-۲x^۲) & x^۲-x-۲ \\ \hline -x^۲+۴ & \\ -(-x^۲+۲x) & \\ \hline -۲x+۴ & \\ -(-۲x+۴) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

$$\lim_{x\to۲}\frac{x^۲-۵x+۶}{x^۳-۳x^۲+۴}=\lim_{x\to۲}\frac{(x-۲)(x-۳)}{(x-۲)(x^۲-x-۲)}=\lim_{x\to۲}\frac{x-۳}{(x-۲)(x+۱)}$$

با حذف عامل صفرکننده $x-۲$، مشاهده می‌شود که حد مخرج کسر همچنان برابر صفر است، اما حد صورت کسر برابر صفر نیست. اکنون به محاسبهٔ حد راست و چپ تابع در $x=۲$ می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}\frac{x-۳}{(x-۲)(x+۱)}=\frac{-۱}{۰^+\times۳}=-\infty$$

$$\lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}\frac{x-۳}{(x-۲)(x+۱)}=\frac{-۱}{۰^-\times۳}=+\infty$$

بنابراین گزینهٔ ۲، نمودار این تابع در اطراف $x=۲$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۱ نکته: فرض کنیم f در یک همسایگی راست از a تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim_{x\to a^+}f(x)=-\infty$ به این معناست که می‌توان مقادیر $f(x)$ را از هر عدد منفی دلخواه کوچک‌تر کرد، مشروط بر آنکه x با مقادیر بزرگ‌تر از a به قدر کافی به a نزدیک اختیار شود.

نکته: فرض کنید تابع f در بازه‌ای مثل $(-\infty,b)$ تعریف شده باشد. رابطهٔ $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ به این معناست که به هر مقدار دلخواه می‌توان $f(x)$ را به L نزدیک کرد، مشروط بر آنکه x به قدر کافی کوچک و منفی اختیار شود.

با توجه به نمودار $\lim_{x\to۱^+}f(x)=-\infty$ می‌باشد، پس داریم:

$$\lim_{x\to۱^+}f(f(x))=\lim_{t\to-\infty}f(t)=۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۲ نکته: تابع f روی بازهٔ $[a,b)$ پیوسته است، هرگاه در هر نقطهٔ بازهٔ (a,b) پیوسته بوده و در a از راست پیوسته باشد.

تابع $y=\left[\frac{x}{۳}\right]$، در تمامی نقاط با طول مضارب ۳ ناپیوسته است. مثلاً در نقطه‌های با طول ۳، ۶، ۹ و... ناپیوسته است. (حد چپ و راست نابرابر دارد.)

اکنون به بررسی پیوستگی تابع $f(x)=(x^۲-۹x+۱۸)\left[\frac{x}{۳}\right]$ در تمام نقاط با طول مضرب ۳ از صفر به بعد می‌پردازیم:

$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}(x^۲-۹x+۱۸)\times ۰=۰$, $f(x)=۰ \Rightarrow$ f در $x=۰$ از راست پیوسته است.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^+}(x-۳)(x-۶)\times ۱=۰\\ \lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۳^-}(x-۳)(x-۶)\times ۰=۰\end{cases}$, $f(۳)=۰ \Rightarrow$ f در $x=۳$ پیوسته است.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۶^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۶^+}(x-۳)(x-۶)\times ۲=۰\\ \lim\limits_{x\to ۶^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۶^-}(x-۳)(x-۶)\times ۱=۰\end{cases}$, $f(۶)=۰ \Rightarrow$ f در $x=۶$ پیوسته است.

$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۹^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۹^+}(x-۳)(x-۶)\times ۳=۵۴\\ \lim\limits_{x\to ۹^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۹^-}(x-۳)(x-۶)\times ۲=۳۶\end{cases} \Rightarrow$ f در $x=۹$ ناپیوسته است.

پس تابع f در بازهٔ $[۰,۹)$ پیوسته است و k نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۹ باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۳ نکته: برای تابع چندجمله‌ای $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ که $a_n\neq 0$، داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty} a_nx^n$$

نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$. در این حالت برای محاسبهٔ حد $\frac{f}{g}$ در نقطهٔ a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-\sqrt{x^2+5x+22}}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-|x|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax-x}{x}$$

$a\neq 0$، زیرا اگر $a=0$، آنگاه حاصل حد فوق برابر -1 است، پس:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-1)x}{x}=a-1=2\Rightarrow a=3$$

برای محاسبهٔ حد $f(x)$ در $x=2$، صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to2}\frac{3x-\sqrt{x^2+5x+22}}{x-2}\times\frac{3x+\sqrt{x^2+5x+22}}{3x+\sqrt{x^2+5x+22}}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{9x^2-x^2-5x-22}{(x-2)\underbrace{(3x+\sqrt{x^2+5x+22})}_{12}}=\lim_{x\to2}\frac{8x^2-5x-22}{12(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(8x+11)}{12(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{8x+11}{12}=\frac{16+11}{12}=\frac{27}{12}=\frac{9}{4}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۴ نکته: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $(x-a)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x+3$ برابر $f(-3)$ و بر $x-3$ برابر $f(3)$ است. بنابراین:

$$f(-3)=7\ ,\ f(3)=-3$$

اگر $q(x)$، خارج‌قسمت تقسیم $f(2x-1)$ بر $(x-2)(x+1)$ باشد، داریم:

$$f(2x-1)=(x-2)(x+1)q(x)+\underbrace{ax-b}_{\text{باقی‌مانده}}\qquad (*)$$

اکنون داریم:

$$2x-1=-3\Rightarrow x=-1\xrightarrow{(*)} f(-3)=0+a(-1)-b\xrightarrow{f(-3)=7} 7=-a-b\qquad (1)$$

$$2x-1=3\Rightarrow x=2\xrightarrow{(*)} f(3)=0+a(2)-b\xrightarrow{f(3)=-3} -3=2a-b\qquad (2)$$

$$(2)-(1)\Rightarrow 3a=-10$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۵

نکته: $a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$

نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$. در این حالت برای محاسبهٔ حد در $\frac{f}{g}$ نقطهٔ a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

راه‌حل اول:

با استفاده از اتحاد چاق و لاغر و اتحاد مزدوج، داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{\sqrt{۲x-۱}-۱}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱}{\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱}\times\frac{\sqrt{۲x-۱}+۱}{\sqrt{۲x-۱}+۱}\right)=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{۲x-۲}\times\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{۲x-۱}+۱}{\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{۲(x-۱)}\times\frac{۲}{۳}=\frac{۱}{۳}$$

راه‌حل دوم:

با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال حاصل حد را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x}-۱}{\sqrt{۲x-۱}-۱}\overset{Hop}{=}\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}{\frac{۲}{۲\sqrt{۲x-۱}}}=\frac{\frac{۱}{۳}}{۱}=\frac{۱}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۶

نکته: فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=۰$ ، در این صورت اگر $L>۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

مخرج کسر در $x=۱$ برابر صفر است، پس $x-۱$ یکی از عامل‌های مخرج است. با تجزیهٔ مخرج داریم:

$$۲x^۲-ax+a-۲=(x-۱)(۲x-a+۲)$$

از طرفی می‌دانیم:

$$x\to ۱^- \Rightarrow x-۱\to ۰^-$$

پس در همسایگی چپ $x=۱$ ، علامت $x-۱$ منفی است. بنابراین:

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{۳x+a}{(x-۱)(۲x-a+۲)}=\frac{۳+a}{(۰^-)(۴-a)}=-\infty$$

برای اینکه حاصل حد برابر $-\infty$ شود، باید $\frac{۳+a}{۴-a}>۰$ ، پس:

a		-۳		۴	
$\frac{۳+a}{۴-a}$	$-$	۰	$+$	∥	$-$

تن

$$\Rightarrow -۳<a<۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۷ نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k)=\lim_{x\to+\infty}ax^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^n$$

نکته: $$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{cx^m+dx^{m-1}+\cdots}=\begin{cases}0 & n<m\\ \frac{a}{c} & n=m \quad (ac\neq 0)\\ +\infty \text{ یا } -\infty & n>m\end{cases}$$

طبق نمودار وقتی $x\to+\infty$ ، $f(x)\to 3$؛ بنابراین: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=3$

در این صورت درجهٔ صورت و مخرج با هم برابر است، پس ضریب x^3، در صورت برابر صفر بوده، یعنی $b-2=0$ و $b=2$، پس:

$$f(x)=\frac{(a+2)x^2+5x-1}{2x^2+3x-4}$$

در این صورت حد تابع f در بی‌نهایت برابر با $\frac{a+2}{2}$ است، پس:

$$\frac{a+2}{2}=3 \Rightarrow a+2=6 \Rightarrow a=4$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۸ نکته (قضیه)؛ فرض کنیم $\lim_{x\to\alpha}f(x)=L\neq 0$ و $\lim_{x\to\alpha}g(x)=0$ در این صورت، اگر $L>0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$

نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0$. در این حالت برای محاسبهٔ حد در نقطهٔ a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

می‌دانیم $\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{2x+3}-x}{x-3}=\frac{2}{-4}=-\frac{1}{2}$ ، پس برای آنکه $\lim_{x\to-1}f(x)$ برابر $-\infty$ باشد، باید عبارت $2x^2+ax+b$ در همسایگی راست و چپ -1 با مقادیر مثبت به صفر میل کند، پس باید -1 ریشهٔ مضاعف معادلهٔ $2x^2+ax+b=0$ باشد، پس: $2x^2+ax+b=2(x+1)^2$

بنابراین حاصل حد خواسته‌شده برابر است با:

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{2x+3}-x}{2(x+1)^2(x-3)}\times\frac{\sqrt{2x+3}+x}{\sqrt{2x+3}+x}=\lim_{x\to3}\frac{2x+3-x^2}{2(x+1)^2(x-3)(\sqrt{2x+3}+x)}$$

$$=\lim_{x\to3}\frac{(x-3)(-x-1)}{2(x+1)^2(x-3)(\sqrt{2x+3}+x)}=\lim_{x\to3}\frac{-1}{2(x+1)(\sqrt{2x+3}+x)}=\frac{-1}{2\times4\times(3+3)}=-\frac{1}{48}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۸۹ نکته: تابع f را در نقطهٔ $x=c$ پیوسته می‌نامیم، هرگاه: $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)\ (c\in\mathbb{R})$

اگر a عددی فرد باشد، می‌دانیم $\cos\frac{\pi a}{۲}=۰$، پس داریم:

$$\lim_{x\to a^+}(\cos(\frac{\pi x}{۲})\times[x])=۰\times a=۰$$

$$\lim_{x\to a^-}(\cos(\frac{\pi x}{۲})\times[x])=۰\times(a-۱)=۰$$

مقدار تابع نیز در هر نقطه به طول فرد برابر صفر است، پس تابع در نقطه‌ای به طول فرد پیوسته است، اما در نقاط با طول صحیح و زوج $[x]$ دارای حد راست و چپ نابرابر است و مقدار $\cos\frac{\pi x}{۲}$ نیز برابر یک یا منفی یک است، پس تابع $y=\cos(\frac{\pi x}{۲})\times[x]$ در این نقاط ناپیوسته است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۰ نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی و $\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=۰$ است. در این حالت برای محاسبهٔ حد در نقطهٔ a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفرشدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود و با ساده‌کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

نکته: $a^۳-b^۳=(a-b)(a^۲+ab+b^۲)$

راه حل اول: با استفاده از اتحادهای مزدوج و چاق و لاغر داریم:

$$\lim_{x\to ۱}(\frac{\sqrt{۳+\sqrt{x}}-۲}{۲(\sqrt[۳]{x}-۱)}\times\frac{\sqrt{۳+\sqrt{x}}+۲}{\sqrt{۳+\sqrt{x}}+۲}\times\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱}{\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱})=\lim_{x\to ۱}\frac{۳+\sqrt{x}-۴}{۲(x-۱)}\times\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱}{\sqrt{۳+\sqrt{x}}+۲}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{۲(x-۱)}\times\frac{۳}{۴}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x}-۱}{۲(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۱}{۴}\times\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۱۶}$$

راه حل دوم: می‌توان حاصل حد را با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال به‌دست آورد:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{۳+\sqrt{x}}-۲}{۲\sqrt[۳]{x}-۲}\overset{Hop}{=\!=}\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۱}{۲\sqrt{x}}}{\frac{۲\sqrt{۳+\sqrt{x}}}{۲}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{۱۶}$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۱ نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-1}+\cdots+k)=\lim_{x\to+\infty}ax^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}ax^n$$

اگر ضابطهٔ تابع f به‌صورت $f(x)=mx+h$ باشد، آنگاه داریم:

$$y=mx+h \Rightarrow mx=y-h \Rightarrow x=\frac{1}{m}y-\frac{h}{m} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{1}{m}x-\frac{h}{m}$$

از طرفی، تابع خطی g بر f عمود است، پس شیب g، قرینهٔ معکوس شیب f است؛ بنابراین معادلهٔ g به‌صورت زیر است:

$$g(x)=-\frac{1}{m}x+k$$

اکنون حاصل حد خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f^{-1}(x)}{|g(x)|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{m}x-\frac{h}{m}}{\left|-\frac{1}{m}x+k\right|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{m}x}{|-\frac{1}{m}x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{m}x}{\frac{1}{m}x}=1$$

دقت کنید که شیب تابع خطی f منفی است، پس $m<0$ و در نتیجه $-\frac{1}{m}>0$ است؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to-\infty}\left|-\frac{1}{m}x\right|=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{m}x$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۲ نکته: در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجهٔ اول $(x-a)$، باقی‌ماندهٔ تقسیم برابر $f(a)$ است.

نکته: اگر $f(a)$ برابر صفر باشد، آنگاه $f(x)$ بر $(x-a)$ بخش‌پذیر است.

$f(x)$ بر $x-1$ بخش‌پذیر است، بنابراین: $x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=0 \Rightarrow 2-a+b-2=0 \Rightarrow a=b \ (*)$

از طرفی باقی‌ماندهٔ $f(x)$ بر $x+2$ برابر -12 است، بنابراین:

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow f(-2)=-12 \Rightarrow -16-4a-2b-2=-12$$

$$\Rightarrow -4a-2b=6 \xrightarrow{(*)} -6a=6 \Rightarrow a=-1 \xrightarrow{(*)} b=-1$$

با توجه به مقادیر a و b داریم: $f(x)=2x^3+x^2-x-2$

از طرفی: $x-a=x+1$ و $2ax+f(x+2b)=-2x+f(x-2)$.

حال می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ تقسیم عبارت $y=-2x+f(x-2)$، را بر $x+1$ به‌دست آوریم.

پس کافی است در عبارت مورد نظر $x=-1$ را قرار دهیم:

$$\text{باقی‌مانده}=-2(-1)+f(-3)=2+2(-3)^3+(-3)^2-(-3)-2=-42$$

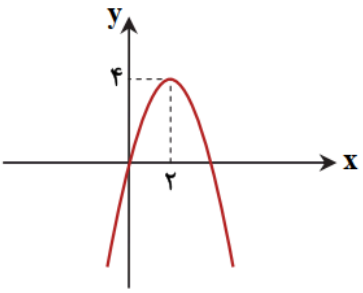
بنابراین گزینهٔ ۴ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۳ نکته: تابع $y=[x]$ در نقاط با طول صحیح حد ندارد.

نکته: اگر $k\in\mathbb{Z}$، آنگاه:

$$k\le x<k+1 \Leftrightarrow [x]=k$$

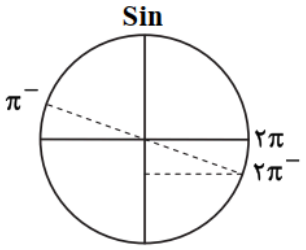


وقتی $x\in\mathbb{Z}$، عبارت $۴x-x^۲$ عددی صحیح است و تابع $f(x)=[۴x-x^۲]$، فقط در $x=۲$ (رأس سهمی) حد دارد. به شکل زیر دقت کنید:

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=[۴^-]=۳$$

پس $k=۲$ است.

اکنون حاصل حد چپ تابع داده‌شده را در $x=۲\pi$ به‌دست می‌آوریم:



$$\lim_{x\to ۲\pi^-}(\cos ۲x[\sin x]+[\tan\frac{x}{۲}])=(\cos ۴\pi)[\sin(۲\pi^-)]+[\tan(\pi^-)]$$
$$=۱\times[۰^-]+[۰^-]=-۲$$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۴ نکته: فرض کنیم f یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n به‌صورت $f(x)=ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+k$ باشد که در آن n عددی طبیعی و a یک عدد حقیقی غیرصفر است. در این صورت:

$$\lim_{x\to+\infty}(ax^n+bx^{n-۱}+\cdots+k)=\lim_{x\to+\infty}ax^n \quad , \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}ax^n$$

با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{bx^m}=\begin{cases}\infty & n>m\\ ۰ & n<m\\ \frac{a}{b} & n=m\end{cases}$$

که x^n و x^m بزرگ‌ترین درجه‌های صورت و مخرج کسر هستند.

برای اینکه جواب حد، عددی مخالف صفر شود باید درجه‌های صورت و مخرج یکی شود و از آنجایی‌که مخرج درجه ۲ است صورت کسر هم باید درجه ۲ باشد، بنابراین:

$$a-۲=۰ \Rightarrow a=۲$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{۳x^۲-۱۲}{bx^۲-x+۷}=۶ \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{۳x^۲}{bx^۲}=۶ \Rightarrow b=\frac{۱}{۲} \Rightarrow (a,b)=(۲,\frac{۱}{۲})$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۵ نکته: فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 0$، در این صورت اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty .$$

نقطهٔ $(-1,-4)$ رأس سهمی است، بنابراین ضابطهٔ سهمی را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x) = a(x+1)^2 - 4 \xrightarrow{f(0)=-3} a - 4 = -3 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow f(x) = (x+1)^2 - 4 = x^2 + 2x - 3 \Rightarrow a = 1, b = 2, c = -3$$

اکنون ضابطهٔ $g(x)$ را می‌نویسیم:

$$g(x) = \frac{-3x+2}{(x-1)(x^2+2x-3)} = \frac{-3x+2}{(x-1)(x-1)(x+3)} = \frac{-3x+2}{(x-1)^2(x+3)}$$

با توجه به گزینه‌ها، $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ است، پس کافی است حد تابع g را در $x = 1$ به‌دست آوریم:

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{-3x+2}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{-1}{(0^+)(4)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

بنابراین نمودار تابع در اطراف خط $x = 1$ شبیه گزینهٔ ۴ است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۶ نکتهٔ ۱: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

نکتهٔ ۲: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. در این حالت برای محاسبهٔ حد $\frac{f}{g}$ در نقطهٔ a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفر شدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود و با ساده کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

نکتهٔ ۳: قضیه: فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 0$. در این صورت اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

ابتدا با ضرب کردن صورت و مخرج کسر در یک عبارت جبری، ریشهٔ سوم را در صورت از بین می‌بریم، سپس به حذف عامل صفرکننده می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{8-\sqrt{x}} - 2}{x} \times \frac{(\sqrt[3]{(8-\sqrt{x})^2} + 2\sqrt[3]{8-\sqrt{x}} + 2^2)}{(\sqrt[3]{(8-\sqrt{x})^2} + 2\sqrt[3]{8-\sqrt{x}} + 2^2)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{8-\sqrt{x}-8}{x \times (4+4+4)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\sqrt{x}}{12x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-1}{12\sqrt{x}} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

توجه کنید در کسر $\frac{-1}{12\sqrt{x}}$ حد صورت برابر -1 است و مخرج با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند، پس حاصل حد، منفی بی‌نهایت است.

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۷ نکته: فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$؛ در این صورت اگر $L>0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$$

همان‌طور که در شکل می‌بینید، $f(2)=0$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=0^-$.

از طرفی تابع پیوستهٔ g در $x=2$ مقداری مثبت دارد، پس:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{g(x)}{f(4-x)}=\frac{g(2^-)}{f(2^+)}=\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۸ نکته: اگر توابع f و g در $x=a$ حد داشته باشند، توابع $f\pm g$ و $f\times g$ نیز در $x=a$ حد دارند.

نکتهٔ ۳: فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L\neq 0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. در این صورت اگر $L<0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آنگاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$$

با توجه به نمودار توابع f و g، مشخص است که توابع f و g در $x=2$ حد دارند.

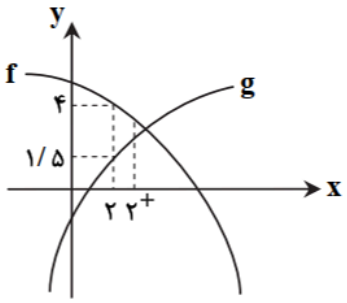
اگر $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\alpha$ و $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=\beta$ باشد، داریم: $(\alpha>\beta>0)$

$$\lim_{x\to 2}(f-g)(x)=\lim_{x\to 2} f(x)-\lim_{x\to 2} g(x)=\alpha-\beta=2/5 \Rightarrow \alpha=2/5+\beta \quad (1)$$

$$\lim_{x\to 2}(f\cdot g)(x)=\lim_{x\to 2} f(x)\times\lim_{x\to 2} g(x)=\alpha\beta=6 \quad (2)$$

$$(1)\text{ و }(2)\Rightarrow \beta(2/5+\beta)=6\Rightarrow \beta^2+2/5\beta-6=0\Rightarrow(\beta+4)(\beta-1/5)=0\Rightarrow\begin{cases}\beta=-4 & \times\\ \beta=1/5\Rightarrow\alpha=4\end{cases}$$

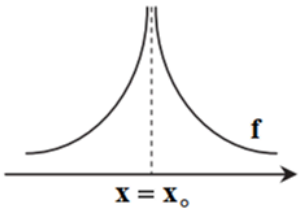
اکنون حاصل حد خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:



$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2[f(x)]-7}{4g(x)-6}=\frac{2[4^-]-7}{4(1/5^+)-6}=\frac{6-7}{0^+}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۹۹ نکته: $\dfrac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=+\infty$



همان‌طور که در شکل می‌بینید، وقتی x از سمت راست و چپ به $x=x_0$ نزدیک می‌شود، مقادیر $f(x)$ به‌صورت بی‌کران افزایش می‌یابد، یعنی $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{2-x}{x^2+ax+9}=+\infty$، پس تابع f، مخرجی با ریشهٔ مضاعف دارد. داریم:

$$\Delta_{\text{مخرج}}=0\Rightarrow a^2-36=0\Rightarrow a=\pm 6$$

اگر $a=-6$، $f(x)=\dfrac{2-x}{(x-3)^2}$ و $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-\infty$ ← ×

اگر $a=6$، $f(x)=\dfrac{2-x}{(x+3)^2}$ و $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=+\infty$ ← ✓

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۰ **نکته: اگر $D_f = \mathbb{R}$ و f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد، می‌گوییم f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است.**

نکته: اگر معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$ ریشهٔ حقیقی نداشته باشد، باید Δ منفی باشد.

اگر دامنهٔ تابع f برابر مجموعه اعداد حقیقی نباشد، تابع f نمی‌تواند روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد، یعنی با توجه به اینکه تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، تابع f در تمامی نقاط تعریف‌شده است، پس مخرج کسر نباید هیچ‌گاه برابر صفر شود، یعنی معادلهٔ $(k+6)x^2-4kx+(k+1)=0$ هیچ ریشه‌ای ندارد. پس:

$$\Delta<0 \Rightarrow (-4k)^2-4(k+6)(k+1)<0 \Rightarrow 16k^2-4(k^2+7k+6)<0$$

$$\Rightarrow 4k^2-k^2-7k-6<0 \Rightarrow 3k^2-7k-6<0 \Rightarrow (3k+2)(k-3)<0$$

k		$-\frac{2}{3}$		3	
$(3k+2)(k-3)$	+	0	−	0	+

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}<k<3$$

(گزینه دو ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۱ صورت‌چی‌میگه؟ رادیکال و حد مبهم $\frac{0}{0}$ شمارو یاد چیزی نمیندازه؟ برید سراغ مزدوج ...

تکه پله: تابع حد در $x=0$ دارای ابهام $\frac{0}{0}$ است. برای رفع ابهام از اتحاد مزدوج استفاده می کنیم و عامل صفرشونده را از صورت و مخرج حذف می کنیم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}\times\frac{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x}}=\lim_{x\to 0}\frac{2-(1+\cos x)}{(1-\cos^2 x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(1-\cos x)}}{\cancel{(1-\cos x)}(1+\cos x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+\cos x)(\sqrt{2}+\sqrt{1+\cos x})}=\frac{1}{(1+1)(\sqrt{2}+\sqrt{2})}=\frac{1}{2\times 2\sqrt{2}}=\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{8}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۲ **پلهٔ اول:** ابتدا مرز دامنه‌ها رامشخص می‌کنیم: $[x]\le 1 \Rightarrow x<2, [x]>1 \Rightarrow x\ge 2$

بنابراین تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}2^x-ax & ;x<2\\ a+\cos\frac{\pi x}{4} & ;x\ge 2\end{cases}$$

پلهٔ دوم: برای اینکه تابع f همواره پیوسته باشد باید در $x=2$ نیز پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-} f(x)=f(2)\Rightarrow 2^2-2a=a+\cos\frac{\pi}{2}\Rightarrow 4=3a\Rightarrow a=\frac{4}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۳ با جایگذاری $x=0$ به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم. برای رفع ابهام عبارت را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{x^2}{2}-\sqrt{1-x^2}}{x^4}\times\frac{1-\frac{x^2}{2}+\sqrt{1-x^2}}{1-\frac{x^2}{2}+\sqrt{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{4}}{x^4\times 2}=\frac{1}{8}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۴ ابتدا باید مقدار براکت را مشخص کنیم.

$$\lim_{x\to 3^-}\left[\frac{x}{x-2}\right]=\lim_{x\to 3^-}\left[1+\frac{2}{x-2}\right]=\lim_{x\to 3^-}1+\left[\frac{2}{x-2}\right]=1+2=3$$

بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-2x-3}{\sqrt{(x-3)^2}+x^2-9}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-2x-3}{|x-3|+x^2-9}\xrightarrow{x\to 3^-}\lim_{x\to 3^-}\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}=\frac{0}{0}\ \text{مبهم}$$

$$\to\lim_{x\to 3^-}\frac{(x+1)(x-3)}{(x-3)(x+2)}=\lim_{x\to 3^-}\frac{x+1}{x+2}=\frac{4}{5}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۵ چون حدِ مخرج تابع در همسایگی $x=1$ برابر صفر است و حاصل حد عددی حقیقی است، پس باید صورت هم در همسایگی $x=1$ برابر صفر شود (حالت $\frac{0}{0}$)، پس:

$$f^{-1}(1)-4=0\Rightarrow f(4)=1\Rightarrow\sqrt{4+c}-b=1$$

حد تابع بعد از رفع ابهام برابر عدد ۲ شده، پس:

$$f(x)=\sqrt{x+c}-b\Rightarrow f^{-1}(x)=(x+b)^2-c;(x\geq -b)$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}\frac{f^{-1}(x)-4}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+b)^2-c-4}{x^2+x-2}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to 1}\frac{2(x+b)}{2x+1}=2\Rightarrow\frac{2(1+b)}{3}=2\Rightarrow 1+b=3\Rightarrow b=2\to c=5$$

پس $f(x)=\sqrt{x+5}-2$ است.

حاصل حد خواسته شده را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{x+5}-2}{x-1}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{HOP}}\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{2\sqrt{x+5}}=\frac{1}{4}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۶ ابتدا مرز دامنه‌ها رامشخص می‌کنیم:

$$[x]\leq 1\Rightarrow x<2\quad,\quad [x]>1\Rightarrow x\geq 2$$

بنابراین تابع $f(x)$ به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}2^x-ax & ;x<2\\ a+\cos\frac{\pi x}{4} & ;x\geq 2\end{cases}$$

برای اینکه تابع f همواره پیوسته باشد باید در $x=2$ نیز پیوسته باشد:

$$\lim_{x\to 2^-}f(x)=\lim_{x\to 2^+}f(x)=f(2)\Rightarrow 2^2-2a=a+\cos\frac{\pi}{2}\Rightarrow 4=3a\Rightarrow a=\frac{4}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۷ **سرنخ** در توابع گویا وقتی $x \to \infty$ میل کند، به درجهٔ پرتوان صورت و مخرج توجه کنید.

پله اول: چون حاصل حد برابر عدد a است، پس درجه پر توان صورت و مخرج کسر یکسان است. از طرفی عبارت پرتوان مخرج $cx^۲$ است

بنابراین درجه پر توان صورت نیز باید برابر ۲ شود، پس ضریب $x^۳$ برابر صفر است: $(a-۴)=۰ \Rightarrow a=۴$

پله دوم: حاصل حد برابر $a=۴$ است:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(b-۳)x^۲+۱۲x-۴}{cx^۲-۴bx-۴}=۴ \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{(b-۳)x^۲}{cx^۲}=۴$$

$$\Rightarrow \frac{b-۳}{c}=۴ \Rightarrow \begin{cases} b-۳=۴c \\ b+۲c=۱۲ \end{cases} \Rightarrow b=۹, c=\frac{۳}{۲}$$

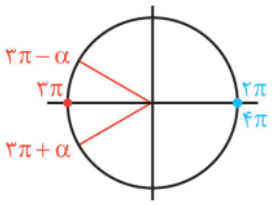
بنابراین حاصل $\frac{ab}{c}$ برابر $\frac{۴\times۹}{\frac{۳}{۲}}=۲۴$ است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۸ مخرج کسر در $x=a$ برابر صفر است و داریم:

$$۴(۲\cos^۲ a-۱)-۴\cos a+۱-\cos^۲ a=۰$$

$$\to ۷\cos^۲ a-۴\cos a-۳=۰ \xrightarrow{\text{صفر = جمع ضرایب}} \cos a \begin{cases} ۱ \to ۰, ۲\pi, ۴\pi \text{ غ ق ق} \\ -\frac{۳}{۷} \end{cases}$$



که با توجه به دایره داریم:

$$(۳\pi-\alpha)+(۳\pi+\alpha)=۶\pi$$

(ماروال ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۰۹ در ابتدا تکلیف مقدار براکت‌ها و علامت قدر مطلق را مشخص می‌کنیم:

$$x \to ۰^-: [x-x^۳]=-۱ \text{ و } |۲x^۲+x|=-(۲x^۲+x)$$

$$[\frac{-۷x+۲}{۱۰}]=۰ \text{ و } \left|\frac{۱-۵x}{۴}\right|=\frac{۱-۵x}{۴}$$

و درنتیجه داریم:

$$\lim_{x\to۰^-}\frac{-۵x+۲x^۲+x}{\frac{۵x-۱}{۴}(x^۲-۵x)}=\lim_{x\to۰^-}\frac{x(-۴+۲x)}{x(\frac{۵x-۱}{۴})(x-۵)}=\frac{-۴}{-\frac{۱}{۴}(-۵)}=\frac{۱۶}{۵}=۳/۲$$

(ماروال ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۰ با استفاده از هم‌ارزی برنولی داریم:

$$\lim_{x\to۰^-}\sqrt[n]{۱\pm\alpha}=۱\pm\frac{\alpha}{n}$$

$$\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{۱-\sqrt{۱-ax^۲}}}{x}=\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{۱-(۱-\frac{ax^۲}{۲})}}{x}=\lim_{x\to۰^-}\frac{\sqrt{\frac{a}{۲}}|x|}{x}=-\sqrt{\frac{a}{۲}}=-۲\to\sqrt{\frac{a}{۲}}=۲\to a=۸$$

(ماروال ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

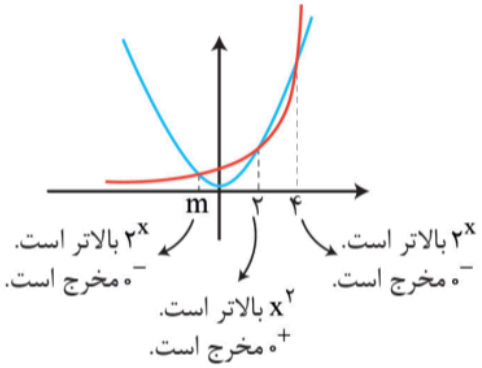
۱۱۱

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2}{2\sqrt{1-2x}}-\frac{-3}{3\sqrt[3]{(1-3x)^2}}}{2x}=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{مرتب کنیم}}\lim_{x\to 0}\frac{-(1-2x)^{-\frac{1}{2}}+(1-3x)^{-\frac{2}{3}}}{2x}$$

$$\xrightarrow{HOP}\lim_{x\to 0}\frac{-(-\frac{1}{2})(-2)(1-2x)^{-\frac{3}{2}}+(\frac{-2}{3})(-3)(1-3x)^{-\frac{5}{3}}}{2}=\frac{-1+2}{2}=\frac{1}{2}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۲ مخرج کسر، سه ریشهٔ ۲ و ۴ و عددی بین ۱- و صفر (حدود ۰/۷۶-هستند) دارد؛ $\cos 2$ منفی است، $\cos 4$ مثبت است و کسینوس ۰/۷۶- هم مثبت است.



$$x\to 0^+:\frac{(+)}{0^-}=-\infty$$

$$x\to 2^+:\frac{(-)}{0^+}=-\infty$$

$$x\to 4^+:\frac{(-)}{0^-}=+\infty$$

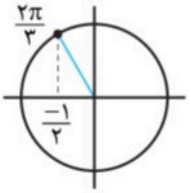
پس α فقط برابر ۴ می‌تواند باشد.

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۳

$$f(x)=\frac{[2\sin x]+\sin x}{(\cos x-1)(2\cos x+1)}$$

$$x\to 0^-:\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{-1+\sin x}{(\cos x-1)(2\cos x+1)}=\frac{-1}{(0^-)(3)}=+\infty$$



$$x\to\frac{2\pi}{3}^+:\Rightarrow\cos x<-\frac{1}{2}\to 2\cos x+1<0\to\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}^+}=\frac{[\sqrt{3}]+\frac{\sqrt{3}}{2}}{(-\frac{3}{2})(0^-)}=+\infty$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۴ **تک پله:** حاصل حدهای خواسته شده را حساب می کنیم:

$$\lim_{x\to(-1)^-}fog(x)=f\left(\tan\left(\frac{\pi}{(-1)^-}\right)\right)=f\left(\tan\left((-\pi)^+\right)\right)=f(0^+)=\log_{\frac{1}{2}}^{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{4}^+}gof(x)=g\left(\log_{\frac{1}{2}}^{\left(\frac{1}{4}\right)^+}\right)=g(2^-)=\tan\left(\frac{\pi}{2^-}\right)=\tan\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^+\right)=-\infty$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۵ **تک پله:** ابتدا باید مقدار براکت را مشخص کنیم. چون مقدار مشتق در $x=۳$ در تابع $-x^۲+۲x+۱$ منفی است این یعنی تابع در آن نقطه نزولی است و خروجی آن به ازای $x=۳^-$ برابر -۲^+ است. داریم:

$$\lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۲x+۲}{\sqrt{(x-۳)^۲}+x^۲-۹}=\lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۲x+۲}{|x-۳|+x^۲-۹}\xrightarrow{x\to ۳^-}\lim_{x\to ۳^-}\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-x-۶}=\frac{۵}{۰^-}=-\infty$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۶ **سرنخ** قدر مطلق را تعیین علامت کرده و مقدار جزء صحیح را در نقطهٔ موردنظر قرار دهید.

تک پله:

$$f(x)=\frac{x^۲+[x]|x|-۸}{x^۳-۸}\qquad \lim_{x\to-\infty}f\left(۲-\frac{۱}{x}\right)=f\left(۲-\frac{۱}{-\infty}\right)=f(۲-۰^-)=f(۲^+)=\lim_{x\to ۲^+}f(x)$$

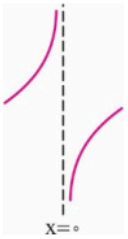
$$\lim_{x\to ۲^+}f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲+|x|[x]-۸}{x^۳-۸}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲+x[۲^+]-۸}{x^۳-۸}=$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲+۲x-۸}{x^۳-۸}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{\text{تجزیه}}\lim_{x\to ۲^+}\frac{\cancel{(x-۲)}(x+۴)}{\cancel{(x-۲)}(x^۲+۲x+۴)}=\frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۷ **تک پله:**

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to ۰^+}\frac{f(x-۱)+۱}{۲-f(x)}=\frac{f(-۱^+)+۱}{۲-f(۰^+)}=\frac{۱+۱}{۲-۲^+}=\frac{۲}{۰^-}=-\infty\\ \lim_{x\to ۰^-}\frac{f(x-۱)+۱}{۲-f(x)}=\frac{f(-۱^-)+۱}{۲-f(۰^-)}=\frac{۱+۱}{۲-۲^-}=\frac{۲}{۰^+}=+\infty\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$



(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۸ **سرنخ** در حدهای شامل جزء صحیح، مقدار جزء صحیح را در نقطهٔ داده شده قرار می دهیم. توجه کنید که حد چپ و راست هر دو باید برابر $+\infty$ شود.

پله اول:

$$x=۶^+:\frac{a[۶^+]-[(-۱۲)^-]}{۱+۲\sin\left(\frac{۷\pi}{x}\right)}=+\infty\Rightarrow\frac{۶a+۱۳}{۱+۲\left(\frac{-۱}{۲}\right)^+}=+\infty\Rightarrow\frac{۶a+۱۳}{۰^+}=+\infty\Rightarrow ۶a+۱۳>۰\Rightarrow a>\frac{-۱۳}{۶}\quad *$$

پله دوم:

$$x=۶^-:\frac{a[۶^-]-[(-۱۲)^+]}{۱+۲\sin\left(\frac{۷\pi}{x}\right)}=+\infty\Rightarrow\frac{۵a+۱۲}{۱+۲\left(\frac{-۱}{۲}\right)^-}=+\infty\Rightarrow\frac{۵a+۱۲}{۰^-}=+\infty\ \text{ق}$$

$$\Rightarrow ۵a+۱۲<۰\Rightarrow a<\frac{-۱۲}{۵}\qquad **$$

هیچ مقدار $\Rightarrow$ اشتراک * و ** $\Rightarrow\varnothing$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۱۹ تک پله: اتحاد تقسیم را می‌نویسیم و در آن $x=1$ و $x=-1$ می‌گذاریم:

$$f(x)=(x^2+4x+5)Q(x)+x+2$$
$$f(1)=10Q(1)+3=13\Rightarrow Q(1)=1$$
$$f(-1)=2Q(-1)+1=11\Rightarrow Q(-1)=5$$

با توجه به گزینه‌ها فقط $Q(x)=-2x+3$ مناسب است.

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۰ پله اول: ابتدا با استفاده از نمودار، ضابطهٔ توابع f و g را یافته و آن‌ها را معکوس می‌کنیم:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{3}{a}x+3\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{a}{3}x-a \\ g(x)=-\frac{3}{b}x+3\Rightarrow g^{-1}(x)=-\frac{b}{3}x+b \end{cases}$$

پله دوم:

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^+}\frac{\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\right)x}{\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{3}\right)x-a+b}=\lim_{x\to 3^+}\frac{\left(\frac{3}{a}+\frac{3}{b}\right)x}{(x-3)\left(\frac{a}{3}-\frac{b}{3}\right)}=\frac{\frac{9}{a}+\frac{9}{b}}{0^+(\frac{a}{3}-\frac{b}{3})}=-\infty \xrightarrow{a,b>0} \begin{cases} \frac{9}{a}+\frac{9}{b}>0 \\ \frac{a}{3}-\frac{b}{3}<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{3}-\frac{b}{3}<0\Rightarrow a<b$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۱ سرنخ: توجه به این نکته که در توابع اکیداً نزولی با افزایش x ، مقدار تابع کاهش می‌یابد، کلید حل مسئله است.

پله اول: می‌دانیم اگر $(a,b)\in f$ باشد در این صورت $(b,a)\in f^{-1}$ است، پس داریم:

$$f^{-1}(2)=0\to f(0)=2\xrightarrow{\text{f اکیدا نزولی}} f(0^+)=2^-$$

پله دوم: حد تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x+\cos x}{2-f(1-\cos x)}=\lim\frac{0+1}{2-f(1-1^-)}=\frac{1}{2-f(0^+)}=\frac{1}{2-2^-}=\frac{1}{0^+}=+\infty$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۲ برای اینکه تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ و وارونش بی شمار نقاط تلاقی داشته باشند باید $f(x)=f^{-1}(x)$ باشد، پس باید $a+d=0$ باشد:

$$a+d=0\to 2+a=0\to a=-2\Rightarrow f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$$

حال برای محاسبه حد خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to 1}f\left(x+|x|\right)(x^2-1)\xrightarrow{x>0}\lim_{x\to 1}f(2x)(x^2-1)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2(2x)+3}{(2x)-2}\times(x^2-1)=\frac{0}{0}\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to 1}\frac{(4x+3)\cancel{(x-1)}(x+1)}{2\cancel{(x-1)}}=7$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۳ با استفاده از نمودارهای داده شده حاصل حدها را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۱^+}\big(۲f(x)-g(x)\big)=۲(a+۱)-(b+۲)=۱۱\Rightarrow ۲a-b=۱۱ \quad (۱)$$

$$\lim_{x\to ۱^-}\big(f(x)+g(x)\big)=۲b+۳+۷-a=۰\to ۲b-a=-۱۰ \quad (۲)$$

حال از (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases}۲a-b=۱۱\\ ۲b-a=-۱۰\end{cases}\to\begin{cases}a=۴\\ b=-۳\end{cases}\to ab=-۱۲$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۴ با توجه به نمودار $x=c$ ریشهٔ عبارت صورت و مخرج کسر است و ازطرفی حد تابع در این نقطه برابر ۳ است، بنابراین:

$$x-۱=۰\to x=۱=c$$

$$x^۲+ax-b=۰\xrightarrow{x=۱}۱+a-b=۰\to a-b=-۱$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+ax-b}{x-۱}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{hop}\lim_{x\to ۱}\frac{۲x+a}{۱}=۳$$

$$\to ۲+a=۳\to a=۱\xrightarrow{a-b=-۱}b=۲$$

حال، حاصل حد داده شده را می‌یابیم:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{\sqrt[۳]{x+۵}-\sqrt[۳]{۲x+۲}}{۱-\sqrt{x-۲}}=\frac{۰}{۰}\xrightarrow{hop}$$

$$=\lim_{x\to ۳}\frac{\frac{۱}{\sqrt[۳]{(x+۵)^۲}}-\frac{۲}{\sqrt[۳]{(۲x+۲)^۲}}}{-\frac{۱}{۲\sqrt{x-۲}}}=\frac{\frac{۱}{۱۲}-\frac{۲}{۱۲}}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{\frac{-۱}{۱۲}}{-\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۶}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۵

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{-a^۲+۲a}{-x^۲+۳x-۲}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{-a^۲+۲a}{-(x-۱)(x-۲)}=\frac{-a^۲+۲a}{۰^-}=-\infty$$

$$\to -a^۲+۲a>۰\to ۰<a<۲\to -۲<-a<۰\to -۳<-۱-a<-۱$$

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{-۱-a}{۲^{-x+۱}-۱}=\frac{-۱-a}{۲^{۰^-}-۱}=\frac{-۱-a}{۱^--۱}=\frac{-۱-a}{۰^-}=\frac{\text{عدد منفی}}{۰^-}=+\infty$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۶ شرط پیوستگی $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x\to ۲^-}[۲x]+a=\left[۴^-\right]+a=۳+a \qquad \text{مقدار} = f(۲)=\left[۲\sqrt{۳}\right]=۳$$

$$\lim_{x\to ۲^+} b\frac{x^۲-۴}{|۲-x|}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{b\,(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=۴b$$

$$a+۳=۳\to a=۰$$

$$۴b=۳\to b=\frac{۳}{۴}\to a+b=۰+\frac{۳}{۴}=\frac{۳}{۴}$$

(ماراتون ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۷ ریشه‌های مخرج کسر $x=۰$ و $x=k$ هستند به‌ازاء $x=۰$ صورت عددی غیر صفر است و تابع در این نقطه حد ندارد بنابراین لزوماً $x=k$ ریشهٔ صورت است.

$$k^۳-۲k(k^۲)-k(k)+۲=۰\to -k^۳-k^۲+۲=۰\to k=۱$$

اکنون به یافتن عرض رأس سهمی $y=x^۲+x+۱$ می‌پردازیم.

$$x_s=-\frac{۱}{۲}\to y_s=(-\frac{۱}{۲})^۲+(-\frac{۱}{۲})+۱=\frac{۳}{۴}$$

(مارول ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۸ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا جزء صحیح را تعیین مقدار می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-[x+۱]}{۲x-\sqrt{x}-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-[\overbrace{۱^-+۱}^{۲^-}]}{۲x-\sqrt{x}-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{x^۲-۱}{۲x-\sqrt{x}-۱}=\frac{۰}{۰}$$

گام دوم: حد، ابهام $\frac{۰}{۰}$ دارد. با استفاده از تجزیهٔ عبارت‌ها در صورت و مخرج کسر، عامل صفرکننده در صورت و مخرج را مشخص کرده و با هم ساده می‌کنیم تا حاصل حد مشخص شود. در صورت دو بار از اتحاد مزدوج استفاده می‌کنیم. تجزیهٔ عبارت مخرج را به دو روش توضیح می‌دهیم:

روش اول: $A=۲\underbrace{x}_{(\sqrt{x})^۲}-\sqrt{x}-۱\xrightarrow{\times ۲}۲A=\underbrace{۴(\sqrt{x})^۲}_{(۲\sqrt{x})^۲}-۲\sqrt{x}-۲\xrightarrow{\text{اتحاد جمله‌مشترک}}۲A=(۲\sqrt{x}-۲)(۲\sqrt{x}+۱)$

$$\xrightarrow{\div ۲}A=(\sqrt{x}-۱)(۲\sqrt{x}+۱)$$

روش دوم: $۲(\sqrt{x})^۲-۲\sqrt{x}+\sqrt{x}-۱\xrightarrow[\text{فاکتورگیری}]{\text{دسته‌بندی و}}۲\sqrt{x}(\sqrt{x}-۱)+\sqrt{x}-۱\xrightarrow{\text{فاکتورگیری}}(\sqrt{x}-۱)(۲\sqrt{x}+۱)$

حال حد را نوشته و ساده می‌کنیم.

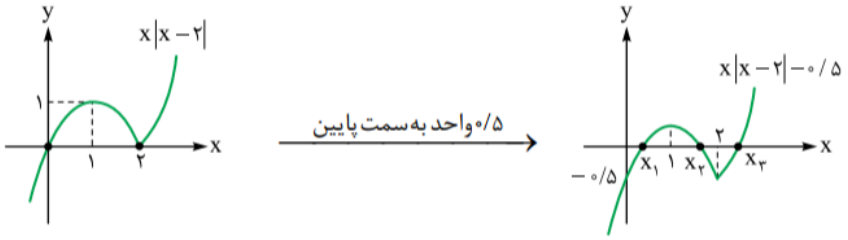
$$\lim_{x\to ۱^-}\frac{\overbrace{x^۲-۱}^{\text{اتحاد مزدوج}}}{۲x-\sqrt{x}-۱}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{\overbrace{(x-۱)\ (x+۱)}^{\text{اتحاد مزدوج}}}{(\sqrt{x}-۱)(۲\sqrt{x}+۱)}=\lim_{x\to ۱^-}\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(x+۱)}{(\sqrt{x}-۱)(۲\sqrt{x}+۱)}=\frac{(۱+۱)(۱+۱)}{۲\times ۱+۱}=\frac{۴}{۳}\Rightarrow a=\frac{۴}{۳}$$

گام سوم: حاصل $\lim\limits_{x\to ۳}[\frac{a}{x}]$ را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۳}[\frac{۴}{۳x}]=[\frac{۴}{۹}]=۰$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۲۹ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** برای این‌که حاصل حد ∞ شود، باید مخرج کسر صفر شود. نمودار عبارت مخرج کسر را رسم می‌کنیم تا در مورد صفرهای آن بحث کنیم. ابتدا نمودار تابع $y=x|x-۲|$ را رسم کرده و سپس آن را به اندازهٔ ۰/۵ واحد به پایین انتقال می‌دهیم.



$$y=x|x-۲| \Rightarrow \begin{cases} x(x-۲) & ۲\le x \\ -x(x-۲) & x<۲ \end{cases}$$

گام دوم: مخرج کسر در سه نقطه به طول‌های $x_۱, x_۲, x_۳$ صفر می‌شود که $x_۱$ قبل از یک و $x_۲$ و $x_۳$ بعد از یک هستند. حاصل حد را در این نقاط به دست می‌آوریم.

- در $x_۱<۱$، مقدار $(x-۱)$ منفی و حد راست مخرج کسر، ۰^+ است؛ پس حد به صورت $\frac{\text{عدد منفی}}{+}=-\infty$ می‌شود.
- در $۱<x_۲$، مقدار $(x-۱)$ مثبت و حد راست مخرج کسر، ۰^- است؛ پس حد به صورت $\frac{\text{عدد مثبت}}{-}=-\infty$ می‌شود.
- در $۱<x_۳$، مقدار $(x-۱)$ مثبت و حد راست مخرج کسر، ۰^+ است؛ پس حد به صورت $\frac{\text{عدد مثبت}}{+}=+\infty$ می‌شود.

پس تنها به ازای یک مقدار a، حاصل حد برابر با $+\infty$ می‌شود.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۰ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** ابتدا طول از مبدأ و عرض از مبدأ خط داده‌شده را به دست می‌آوریم.

عرض از مبدأ $\xrightarrow{x=۰}$ $y=۴a^۲-۹a$

طول از مبدأ $\xrightarrow{y=۰}$ $۰=(a^۴-۲a^۳)x+۴a^۲-۹a \Rightarrow x=\frac{۹a-۴a^۲}{a^۴-۲a^۳}$

گام دوم: مساحت مثلث محصور بین نمودار و محورهای مختصات را می‌نویسیم.

$$S=\frac{۱}{۲}\left|(۴a^۲-۹a)\times\left(\frac{۹a-۴a^۲}{a^۴-۲a^۳}\right)\right|=\frac{۱}{۲}\left|\frac{a^۲(۹-۴a)^۲}{a^۲(۲a-a^۲)}\right|=\frac{۱}{۲}\left|\frac{۱۶a^۲-۷۲a+۸۱}{-a^۲+۲a}\right|$$

گام سوم: حد S را وقتی $a\to\pm\infty$ به دست می‌آوریم.

$$\lim_{a\to\pm\infty}\frac{۱}{۲}\times\left|\frac{۱۶a^۲-۷۲a+۸۱}{-a^۲+۲a}\right| \overset{\text{قاعدهٔ پرتوان}}{=\!=} \lim_{a\to\pm\infty}\frac{۱}{۲}\times\left|\frac{۱۶a^۲}{-a^۲}\right|=\frac{۱۶}{۲}=۸$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۱ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** تابع $f(x)=(\frac{۱}{۲})^x$ را در حد جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(\frac{۱}{۲})^{۲x}+a(\frac{۱}{۲})^x+b}{(\frac{۱}{۲})^x-۱}=-۲$$

گام دوم: از تغییر متغیر $t=(\frac{۱}{۲})^x$ استفاده می‌کنیم. توجه کنید که اگر $x\to ۰$، آن‌گاه $t\to ۱$.

$$\lim_{t\to ۱}\frac{t^۲+at+b}{t-۱}=-۲$$

گام سوم: حد مخرج کسر صفر است. باید حد صورت کسر هم صفر شود تا حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ به وجود آید و پس از رفع ابهام، حاصل حد یک عدد شود.

$$\lim_{t\to ۱}(t^۲+at+b)=۰ \Rightarrow ۱+a+b=۰ \Rightarrow b=-۱-a \quad (*)$$

گام چهارم: راه اول: از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{t\to ۱}\frac{(t^۲+at+b)'}{(t-۱)'}=-۲ \Rightarrow \lim_{t\to ۱}\frac{۲t+a}{۱}=-۲ \Rightarrow ۲+a=-۲ \Rightarrow a=-۴$$

راه دوم: از گام سوم مقدار b را جای‌گذاری می‌کنیم.

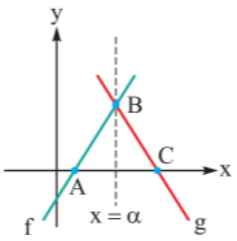
$$\lim_{t\to ۱}\frac{t^۲+at-۱-a}{t-۱}=-۲ \Rightarrow \lim_{t\to ۱}\frac{\overbrace{(t^۲-۱)}^{\text{مزدوج}}+\overbrace{(at-a)}^{\text{فاکتورگیری}}}{t-۱}=\lim_{t\to ۱}\frac{(t-۱)(t+۱)+a(t-۱)}{t-۱}=\lim_{t\to ۱}\frac{(t-۱)(t+۱+a)}{t-۱}=-۲$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to ۱}(t+۱+a)=-۲ \Rightarrow ۱+۱+a=-۲ \Rightarrow a=-۴$$

گام پنجم: از $(*)$ داریم: $b=-۱-(-۴)=۳$؛ پس $a-b=-۴-۳=-۷$ است.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۲ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** اگر معادلهٔ تابع خطی f را به صورت $f(x)=mx+b$ فرض کنیم. تابع خطی g، قرینهٔ تابع f نسبت به خط $x=\alpha$ است (خط $x=\alpha$، خط تقارن مثلث متساوی‌الساقین ABC است). در نتیجه ضابطهٔ تابع g به صورت $g(x)=m(۲\alpha-x)+b$ می‌شود، یعنی $g(x)=-mx+\underbrace{۲\alpha m+b}_{c}$. پس شیب دو خط f و g قرینهٔ یکدیگر هستند.



گام دوم: حد خواسته‌شده را می‌نویسیم و ضابطهٔ توابع f و g را در آن جای‌گذاری می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{(f.g)(۲x)}{f^۲(۳x)+g^۲(۴x)}=\lim_{x\to -\infty}\frac{f(۲x)\times g(۲x)}{(f(۳x))^۲+(g(۴x))^۲}=\lim_{x\to -\infty}\frac{(۲mx+b)\times(-۲mx+c)}{\underbrace{(۳mx+b)^۲}_{۹m^۲x^۲+\cdots}+\underbrace{(-۴mx+c)^۲}_{۱۶m^۲x^۲+\cdots}}$$

گام سوم: چون حاصل حد در $x\to -\infty$ خواسته شده است با استفاده از قاعدهٔ پرتوان، فقط عبارت‌های دارای بزرگ‌ترین توان را در صورت و مخرج می‌نویسیم:

$$\xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x\to -\infty}\frac{\overbrace{(۲mx)(-۲mx)}^{-۴m^۲x^۲}}{۹m^۲x^۲+۱۶m^۲x^۲}=\lim_{x\to -\infty}\frac{-۴m^۲x^۲}{۲۵m^۲x^۲}=-\frac{۴}{۲۵}=-۰/۱۶$$

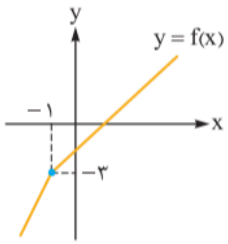
(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۳ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** $f(x)$ تابعی قدرمطلقی است. با استفاده از بازه‌بندی آن را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=۳x-|x+۱| \xrightarrow[\text{قدرمطلق ۱- = x است.}]{\text{ریشهٔ عبارت داخل}} f(x)=\begin{cases} ۳x-\overbrace{|x+۱|}^{\text{مثبت}} & x\geq -۱ \\ ۳x-\overbrace{|x+۱|}^{\text{منفی}} & x<-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۳x-(x+۱) & x\geq -۱ \\ ۳x-(-x-۱) & x<-۱ \end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\geq -۱ \\ ۴x+۱ & x<-۱ \end{cases}$$

گام دوم: نمودار f را رسم می‌کنیم:



گام سوم: با توجه به نمودار رسم‌شده، f تابعی صعودی اکید است، پس برای پیداکردن محل تقاطع f و $f^{-۱}$، کافی است معادلهٔ $f(x)=x$ را حل کنیم:

$$f(x)=x \Rightarrow \begin{cases} x\geq -۱: ۲x-۱=x \Rightarrow x=۱ & \checkmark \\ x<-۱: ۴x+۱=x \Rightarrow ۳x=-۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۳} & \times \text{ غ ق ق چون } x<-۱ \text{ نیست.} \end{cases}$$

بنابراین $\alpha=۱$ است.

گام چهارم: باید ضابطهٔ $f^{-۱}$ را محاسبه کنیم. فقط دقت کنید $\alpha=۱$ شد، پس کافی است فقط ضابطهٔ $f^{-۱}$ به ازای $x\geq -۱$ و $f(x)=۲x-۱$ را به دست آوریم:

$$\underbrace{f(x)}_{y}=۲x-۱ \xrightarrow{x \text{ و } y \text{ عوض}} x=۲y-۱ \Rightarrow ۲y=x+۱ \Rightarrow y=\frac{x+۱}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۲}$$

گام پنجم: سراغ خواستهٔ سؤال می‌رویم:

$$\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f^{-۱}(x)}{x-\alpha} \xrightarrow[\alpha=۱]{f(x)=۲x-۱,\ f^{-۱}(x)=\frac{x+۱}{۲}} \lim_{x\to ۱}\frac{۲x-۱-\frac{x+۱}{۲}}{x-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\overbrace{\frac{۴x-۲-x-۱}{۲}}^{۳x-۳}}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{۳x-۳}{۲(x-۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{۳\cancel{(x-۱)}}{۲\cancel{(x-۱)}}=\frac{۳}{۲}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۴ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** با یک حد نامتناهی مواجه هستیم، پس مخرج کسر، یعنی $f+g$، باید در $x=1$ برابر با صفر شود:

$$\Rightarrow (f+g)(1)=0 \Rightarrow f(1)+g(1)=0 \quad (*)$$

$f(x)=x^2-5x+4$ است، پس $f(1)=0$ می‌شود. با جای‌گذاری $f(1)=0$ در $(*)$، $g(1)=0$ می‌شود، پس $x=1$ ریشهٔ g است.

نکته اگر $x=\alpha$ ریشهٔ معادلهٔ درجه‌دوم $x^2+ax+b=0$ باشد، تجزیه‌شدهٔ این معادله به صورت $(x-\alpha)(x-k)$ می‌شود که $x=k$ ریشهٔ دیگر معادله است.

گام دوم: $x=1$ ریشهٔ g است و با توجه به گزینه‌ها، g به صورت x^2+ax+b است، پس می‌توانیم $g(x)$ را به صورت $g(x)=(x-1)(x-k)$ بنویسیم.

گام سوم: $f+g$ را تجزیه می‌کنیم:

$$f(x)+g(x)=\underbrace{x^2-5x+4}_{(x-1)(x-4)}+(x-1)(x-k)=(x-1)(x-4+x-k)$$

$$\Rightarrow f(x)+g(x)=(x-1)(2x-4-k)$$

گام چهارم: علامت صورت کسر $\frac{x}{(f+g)(x)}$ در $x\to 1^-$ مثبت و حاصل حد برابر $-\infty$ است، پس علامت $(f+g)(x)$ در $x\to 1^-$ باید منفی باشد.

گام پنجم: $(f+g)(x)=(x-1)(2x-4-k)$ است. در $x\to 1^-$، $x-1$ منفی است، پس برای این‌که علامت $(f+g)(x)$ در $x\to 1^-$ منفی باشد، باید علامت $2x-4-k$ در $x\to 1^-$ مثبت شود. با جای‌گذاری $x=1$ در آن داریم:

$$2x-4-k \xrightarrow{x=1} 2-4-k>0 \Rightarrow -2-k>0 \Rightarrow \boxed{k<-2}$$

گام ششم: $k<-2$ است، پس ریشهٔ دیگر g باید کوچک‌تر از -2 باشد، یعنی در کل g باید تابعی درجه‌دوم باشد به طوری که یکی از ریشه‌های آن $x=1$ و ریشهٔ دیگر آن کوچک‌تر از -2 باشد. گزینه‌ها بررسی می‌کنیم:

(۱): $x^2-x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases}$

(۲): $x^2-1=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$

(۳): $x^2+3x-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$

(۴): $x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=1$ (ریشهٔ مضاعف)

با توجه به گزینه‌ها، فقط در (۳) چنین اتفاقی رخ می‌دهد.

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۵ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** در حد داده‌شده، عبارت $f^{-1}(x)$ وجود دارد؛ بنابراین ابتدا وارون تابع f را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{ax-1}-2 \Rightarrow y+2=\frac{1}{3}\sqrt[3]{ax-1} \Rightarrow \sqrt[3]{ax-1}=3(y+2)$$

$$\Rightarrow ax-1=27(y+2)^3 \Rightarrow x=\frac{27(y+2)^3+1}{a} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{27(x+2)^3+1}{a}$$

گام دوم: حاصل حد خواسته‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x^2(f(x)+2)^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{27}{a}(x+2)^3+\frac{1}{a}}{x^2(\frac{1}{3}\sqrt[3]{ax-1}-2+2)^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{27}{a}(x^3+6x^2+12x+8)+\frac{1}{a}}{\frac{1}{27}(ax^3-x^2)}=\lim_{\substack{x\to+\infty \\ \text{قاعدهٔ پرتوان}}}\frac{\frac{27}{a}x^3}{\frac{a}{27}x^3}=(\frac{27}{a})^2$$

مقدار این حد برابر با a است؛ پس:

$$(\frac{27}{a})^2=a \Rightarrow (27)^2=a^3 \Rightarrow a=9$$

گام سوم: حالا مقدار $f(1)$ را می‌یابیم:

$$f(x)=\frac{1}{3}\sqrt[3]{9x-1}-2 \Rightarrow f(1)=\frac{1}{3}\times 2-2=-\frac{4}{3}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۶ **پاسخ تشریحی** راه اول: **گام اول**: با توجه به توابع f و g داده‌شده، تابع fog را تشکیل می‌دهیم:

$$f(g(x))=f(1-x^2)=\begin{cases}\dfrac{1-x^2}{|1-x^2|} & |1-x^2|>1\\ 1-x^2 & |1-x^2|\le 1\end{cases}$$

برای حالت $|1-x^2|>1$، بازه‌های مربوط به x را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}1-x^2>1\\ \text{یا}\\ 1-x^2<-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2<0\Rightarrow\varnothing\\ \text{یا}\\ x^2>2\Rightarrow x>\sqrt{2}\ \text{یا}\ x<-\sqrt{2}\end{cases}\xrightarrow{\text{اجتماع}}x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$$

برای x به‌دست‌آمده، مقدار $\dfrac{1-x^2}{|1-x^2|}=-1$ به دست می‌آید.

برای حالت $|1-x^2|\le 1$ نیز، همانند بالا $x\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$ به دست می‌آید؛ پس در نهایت خواهیم داشت:

$$f(g(x))=\begin{cases}-1 & |x|>\sqrt{2}\\ 1-x^2 & |x|\le\sqrt{2}\end{cases}$$

کافی است که شرط پیوستگی را در نقاط مرزی $x=\pm\sqrt{2}$ بررسی کنیم. در این نقاط رابطهٔ $f(g(x))=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^+}f(g(x))=\lim\limits_{x\to\sqrt{2}^-}f(g(x))$ و هم‌چنین $f(g(-\sqrt{2}))=\lim\limits_{x\to(-\sqrt{2})^+}f(g(x))=\lim\limits_{x\to(-\sqrt{2})^-}f(g(x))$ برقرار است.

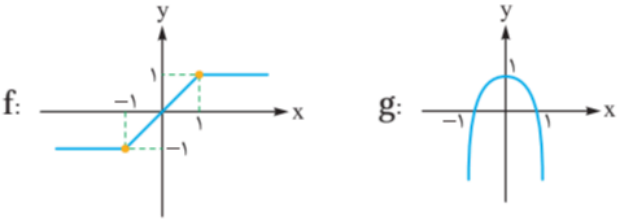
مشاهده می‌کنید که تابع fog، در تمام نقاط پیوسته است.

گام دوم: حالا تابع gof را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x))=\begin{cases}1-\dfrac{x^2}{|x|^2} & |x|>1\\ 1-x^2 & |x|\le 1\end{cases}=\begin{cases}0 & |x|>1\\ 1-x^2 & |x|\le 1\end{cases}$$

مشابه گام اول می‌بینیم که تابع gof هم در تمام نقاط پیوسته است.

راه دوم: از رسم دو تابع استفاده می‌کنیم.



هر دو تابع یکنواخت پیوسته ← fog و gof پیوسته

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۷ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** حاصل حد به ازای $x=\frac{\pi}{۴}$، $\frac{۰}{۰}$ می‌شود؛ بنابراین باید رفع ابهام کنیم. از اتحادهای مثلثاتی کمک می‌گیریم:

$$\begin{cases}۱-\sin ۲x=۱-۲\sin x\cos x=(\sin x-\cos x)^۲\\ ۱+\cos ۴x=۲\cos^۲ ۲x=۲(\cos^۲ x-\sin^۲ x)^۲=۲(\cos x-\sin x)^۲(\cos x+\sin x)^۲\end{cases}$$

گام دوم: حالا در حد داده‌شده خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۱-\sin ۲x}{۱+\cos ۴x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{(\sin x-\cos x)^۲}{۲(\cos x-\sin x)^۲(\cos x+\sin x)^۲}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۱}{۲(\sin x+\cos x)^۲}=\frac{۱}{۲(۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲}=\frac{۱}{۴}$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۸ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** به ازای $x\to\frac{۱}{۲}$، حاصل حد برابر با $-\infty$ شده است؛ پس $x=\frac{۱}{۲}$، ریشهٔ مخرج است.

از طرفی، به ازای $x\to\frac{۱}{۲}^+$ و $x\to\frac{۱}{۲}^-$، این رابطه صدق می‌کند؛ پس $x=\frac{۱}{۲}$ بایستی ریشهٔ مضاعف باشد.

$$ax^۲+bx+۱=a(x-\frac{۱}{۲})^۲\Rightarrow ax^۲+bx+۱=a(x^۲-x+\frac{۱}{۴})$$

$$\Rightarrow\begin{cases}b=-a\\ ۱=\frac{a}{۴}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=۴\\ b=-۴\end{cases}$$

پس $f(x)=\frac{mx^۲+n}{(۲x-۱)^۲}$ است.

گام دوم: رابطهٔ $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=۲$ نیز برقرار است، داریم:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{mx^۲+n}{(۲x-۱)^۲}\overset{\text{قاعدهٔ پرتوان}}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{mx^۲}{۴x^۲}=\frac{m}{۴}=۲\Rightarrow m=۸\Rightarrow f(x)=\frac{۸x^۲+n}{(۲x-۱)^۲}$$

گام سوم: حالا دوباره $\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}f(x)=-\infty$ را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۸x^۲+n}{(۲x-۱)^۲}=\frac{۲+n}{۰^+}=-\infty\Rightarrow n+۲<۰\Rightarrow n<-۲$$

(خیلی سبز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۳۹ ابتدا حد صورت و مخرج را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 1} b\sqrt{2-\sqrt[3]{x}} - b = b - b = 0$$

حد صورت صفر شده است. و چون مقدار حد نهایی طبق صورت سؤال، غیر صفر است و وجود دارد، پس باید حد مخرج نیز صفر شود:

$$\lim_{x\to 1} ax + b = a + b = 0 \Rightarrow a = -b$$

حال حدِ ما به‌صورت $\frac{0}{0}$ درآمده است که برای رفع ابهام آن می‌توان از روش‌های (قاعده هوپیتال، تجزیه، ضرب در مزدوج و ...) استفاده کرد.

$$\lim_{x\to 1} \frac{b\sqrt{2-\sqrt[3]{x}} - b}{-bx + b} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-\sqrt[3]{x}} - 1}{-x + 1} \xrightarrow[\text{مزدوج صورت}]{\text{ضرب و تقسیم در}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(\sqrt{2-\sqrt[3]{x}} - 1\right)\left(\sqrt{2-\sqrt[3]{x}} + 1\right)}{(-x+1)\left(\sqrt{2-\sqrt[3]{x}} + 1\right)} = \lim_{x\to 1} \frac{2-\sqrt[3]{x} - 1}{(-x+1)\times 2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{2(1-x)} = \lim_{x\to 1} \frac{1-\sqrt[3]{x}}{2\left(1-\sqrt[3]{x}\right)\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{1}{2\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}\right)} = \frac{1}{6}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۰ می‌دانیم که شرط پیوستگی در بازه $[a,b]$ این است که اولاً تابع موردنظر در بازه باز (a,b) پیوسته باشد و ثانیاً تابع در $x=a$ پیوستگی راست داشته باشد. پس در این سوال تابع باید در بازه $(۲,۴)$ پیوسته باشد که این به این معنی است که تابع f در نقطه $x=۳$ پیوسته است و در مرحله دوم هم تابع f باید در نقطه $x=۲$ پیوستگی راست داشته باشد، پس:

مورد (۱): تابع f در $x=۳$ پیوسته است:

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} f(x) = f(۳) \quad (A)$$

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} \frac{۳-\sqrt[۳]{۲x^۲+۹}}{x^۲-۴x+۳} = \frac{۰}{۰}$$

برای رفع ابهام از این حد دو روش داریم: **۱)** استفاده از اتحاد چاق و لاغر **۲)** قاعده هوپیتال

۱) استفاده از اتحاد چاق و لاغر:

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{۳-\sqrt[۳]{۲x^۲+۹}}{x^۲-۴x+۳} \times \frac{(۳^۲+۳\sqrt[۳]{۲x^۲+۹}+\sqrt[۳]{(۲x^۲+۹)^۲})}{(۳^۲+۳\sqrt[۳]{۲x^۲+۹}+\sqrt[۳]{(۲x^۲+۹)^۲})}$$

$$= \lim_{x\to ۳^+} \frac{۲۷-(۲x^۲+۹)}{\underbrace{(x-۱)}_{۲}(x-۳)\times \underbrace{(۹+۳\sqrt[۳]{۲x^۲+۹}+\sqrt[۳]{(۲x^۲+۹)^۲})}_{۲۷}} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{-۲(x^۲-۹)}{۲\times ۲۷\times (x-۳)} = \lim_{x\to ۳^+} \frac{-۱\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{۲۷\cancel{(x-۳)}} = -\frac{۶}{۲۷} = -\frac{۲}{۹}$$

۲) استفاده از قاعده هوپیتال:

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{۳-\sqrt[۳]{۲x^۲+۹}}{x^۲-۴x+۳} \xrightarrow{HOP} \lim_{x\to ۳^+} \frac{\frac{۴x}{}}{\frac{}{-۳\sqrt[۳]{(۲x^۲+۹)^۲}}} = \frac{۱۲}{-۳\sqrt[۳]{۷۲۹}} = \frac{۱۲}{-۳\times ۹\times ۲} = -\frac{۲}{۹}$$

$$f(۳) = \lim_{x\to ۳^-} f(x) = \lim_{x\to ۳^-} (ax-b) = ۳a-b$$

مطابق رابطه (A) داریم: $۳a-b=-\frac{۲}{۹} \to ۲۷a-۹b=-۲$

مورد (۲): تابع f در $x=۲$ پیوستگی راست داشته باشد:

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x) = f(۲) \quad (B)$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \lim\limits_{x\to ۲^+} (ax-b) = ۲a-b \\ f(۲) = a(۲)^۲ - b(۲) = ۴a-۲b \end{cases} \xrightarrow{(B)} ۲a-b=۴a-۲b \to ۲a=b$$

$$\begin{cases} ۲۷a-۹b=-۲ \\ ۲a=b \end{cases} \Rightarrow ۲۷a-۹(۲a)=-۲ \to ۲۷a-۱۸a=-۲ \to a=-\frac{۲}{۹}$$

$$\to b=۲a \xrightarrow{a=-\frac{۲}{۹}} b=-\frac{۴}{۹}$$

$$\begin{cases} a=-\frac{۲}{۹} \\ b=-\frac{۴}{۹} \end{cases} \Rightarrow a+b=-\frac{۲}{۹}-\frac{۴}{۹}=-\frac{۶}{۹}=-\frac{۲}{۳}$$

در نتیجه حاصل $a+b$ برابر است با:

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۱ ابتدا ضابطه تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)^{۲}+۱ & x>۱\\ [x]+۲|x| & -۱\le x\le ۱\\ (x-a)^{۲}+۱ & x<-۱\end{cases}$$

حال به سراغ حد خواسته شده می‌رویم:

می‌دانیم: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{۱}{n}=\frac{۱}{+\infty}=۰^{+}$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(f(\frac{۱}{n}-۱)-f(\frac{۱}{n}+۱)\right)=f(۰^{+}-۱)-f(۰^{+}+۱)=f((-۱)^{+})-f(۱^{+})=۰\quad (A)$$

برای محاسبه $f(۱^{+})$ از ضابطه اول و برای محاسبه $f((-۱)^{+})$ از ضابطه دوم استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases}f(x)=(x-a)^{۲}+۱\to f(۱^{+})=(۱-a)^{۲}+۱\\ f(x)=[x]+۲|x|\to f((-۱)^{+})=\left[(-۱)^{+}\right]+۲=-۱+۲=۱\end{cases}$$

حال مطابق رابطه (A) داریم:

$$۱-\left((۱-a)^{۲}+۱\right)=۰\to(۱-a)^{۲}=۰\to a=۱$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۲ اگر $x\to\frac{\pi}{۴}^{+}$، آن‌گاه $\sin x>\cos x$ و در نتیجه $(\sin x-\cos x)\to۰^{+}$، پس:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^{+}}\frac{k\left[\frac{۸x}{\pi}\right]-k^{۲}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^{+}}\frac{۲k-k^{۲}}{\sin x-\cos x}=+\infty$$

$$۲k-k^{۲}>۰\Rightarrow ۰<k<۲\quad (۱)$$

چون مخرج کسر مقداری مثبت است، پس صورت آن هم باید مثبت باشد:

به همین ترتیب، اگر $x\to\frac{\pi}{۴}^{-}$، آن‌گاه $\sin x<\cos x$ و در نتیجه $(\sin x-\cos x)\to۰^{-}$، پس:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^{-}}\frac{k\left[\frac{۸x}{\pi}\right]-k^{۲}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}^{-}}\frac{k-k^{۲}}{\sin x-\cos x}=+\infty$$

چون مخرج کسر مقداری منفی است، پس صورت آن هم باید منفی باشد:

$$k-k^{۲}<۰\Rightarrow k<۰\ \text{یا}\ k>۱\quad (۲)$$

از اشتراک شرایط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $۱<k<۲$.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

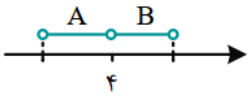
۱۴۳ فرض کنید $A=(\frac{a}{۲},a)$ و $B=(b,b+۱)$، دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

حالت اول: $a=b=۴$، در این صورت:

$A=(\frac{a}{۲},a)=(۲,۴)$

$B=(b,b+۱)=(۴,۵)$

$A\cup B=(۲,۵)-\{۴\}$



در این صورت، تنها عدد صحیح ۳ عضو همسایگی است.

حالت دوم: $b+۱=\frac{a}{۲}=۴$، در این صورت:

$a=۸\ ,\ b=۳$

$A=(\frac{a}{۲},a)=(۴,۸)$

$B=(b,b+۱)=(۳,۴)$

$A\cup B=(۳,۸)-\{۴\}$



در این صورت، عددهای صحیح عضو همسایگی ۵، ۶، ۷ هستند.

پس حداکثر ۳ عدد صحیح عضو همسایگی مورد نظر است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۴ اگر $\lim_{x\to ۲} f(x)=L_۱$ و $\lim_{x\to ۲} g(x)=L_۲$ ، در این صورت:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)}{x^۲+g(x)}=\frac{\lim_{x\to ۲} f(x)}{\lim_{x\to ۲} x^۲+\lim_{x\to ۲} g(x)}=\frac{L_۱}{۴+L_۲}=\frac{۱}{۶}\Rightarrow ۶L_۱=۴+L_۲ \quad (۱)$$

$$\lim_{x\to ۲}(\frac{g}{f})(x)=\frac{\lim_{x\to ۲} g(x)}{\lim_{x\to ۲} f(x)}=\frac{L_۲}{L_۱}=۴\Rightarrow L_۲=۴L_۱ \quad (۲)$$

بنابراین از (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\lim_{x\to ۲} f(x)=۲$ و $\lim_{x\to ۲} g(x)=۸$ و در نتیجه:

$$\lim_{x\to ۲}(gof)(x)=\lim_{x\to ۲} g\big(f(x)\big)=\lim_{t\to ۲} g(t)=۸$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۵

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}}\sin x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\left[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}}\sin x\right]=\left[\frac{۱}{۲}\right]=۰\\ x\to\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\sin x\to\frac{۱}{۲}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۶}}[\sin x]=۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{۲}}\sin x=-۱\Rightarrow\left[\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{۲}}\sin x\right]=[-۱]=-۱\\ x\to-\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\sin x\to-۱^{+}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{۲}}[\sin x]=-۱\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\sin x=۱\Rightarrow\left[\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\sin x\right]=[۱]=۱\\ x\to\frac{\pi}{۲}\Rightarrow\sin x\to۱^{-}\Rightarrow\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}[\sin x]=۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{۳}}\sin x=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\left[\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{۳}}\sin x\right]=\left[-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right]=-۱\\ x\to-\frac{\pi}{۳}\Rightarrow\sin x\to-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{۳}}[\sin x]=-۱\end{cases}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۶ توجه کنید که اگر $x\to ۲^{+}$، آن‌گاه $(۳x-۶)\to ۰^{+}$ و $(۴-۲x)\to ۰^{-}$. بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{f(۳x-۶)}{x-۲}=\lim_{t\to ۰^{+}}\frac{f(t)}{\frac{t}{۳}}=۳\lim_{t\to ۰^{+}}\frac{f(t)}{t}=۳\times ۳=۹$$

$$\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{f(۴-۲x)}{x-۲}=\lim_{t\to ۰^{-}}\frac{f(t)}{-\frac{t}{۲}}=-۲\lim_{t\to ۰^{-}}\frac{f(t)}{t}=-۲(-۳)=۶$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{\frac{f(۳x-۶)}{x-۲}}{\frac{f(۴-۲x)}{x-۲}}=\frac{۹}{۶}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow\lim_{x\to ۲^{+}}\frac{f(۳x-۶)}{f(۴-۲x)}=\frac{۳}{۲}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۷ ابتدا ضابطهٔ تابع $f+g$ را ساده می‌کنیم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\frac{x^۳}{x-۱}+\frac{x-۳}{x^۲-۱}=\frac{x^۳(x+۱)+x-۳}{x^۲-۱}=\frac{x^۴+x^۳+x-۳}{x^۲-۱}=\frac{x^۴-x^۳+۲x^۳-۲+x-۱}{x^۲-۱}$$

$$=\frac{x^۳(x-۱)+۲(x-۱)(x^۲+x+۱)+(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}\xrightarrow{\div(x-۱)}\frac{x^۳+۲x^۲+۲x+۲+۱}{x+۱}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to۱}(f+g)(x)=\lim_{x\to۱}\frac{x^۳+۲x^۲+۲x+۳}{x+۱}=\frac{۱+۲+۲+۳}{۱+۱}=۴$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۸ توجه کنید که: $\lim_{x\to۲^-}(\sqrt{x^۲+۵}-x)=\sqrt{۹}-۲=۱$ ، از طرف دیگر:

$$\sqrt{x^۲+۵}-x>۱\Leftrightarrow\sqrt{x^۲+۵}>x+۱\Leftrightarrow x^۲+۵>x^۲+۲x+۱\Leftrightarrow ۲x<۴\Leftrightarrow x<۲$$

یعنی اگر $x\to۲^-$ و $t=\sqrt{x^۲+۵}-x$ ، آن‌گاه $t\to۱^+$ ، بنابراین:

$$\lim_{x\to۲^-}f(\sqrt{x^۲+۵}-x)=\lim_{t\to۱^+}f(t)=\lim_{t\to۱^+}\frac{t+۱}{t-۲}=\frac{۲}{-۱}=-۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۴۹ توجه کنید که:

$$(f\times g)(x)=f(x)g(x)=(\frac{x}{x-۲}+\frac{x-۱}{x^۲-۴})(\frac{۲x}{x+۲}-\frac{۱}{x-۱})=(\frac{x(x+۲)+x-۱}{x^۲-۴})(\frac{۲x(x-۱)-(x+۲)}{(x+۲)(x-۱)})$$

$$=\frac{x^۲+۳x-۱}{x^۲-۴}\times\frac{۲x^۲-۳x-۲}{(x+۲)(x-۱)}=\frac{x^۲+۳x-۱}{\cancel{(x-۲)}(x+۲)}\times\frac{(۲x+۱)\cancel{(x-۲)}}{(x+۲)(x-۱)}$$

$$=\frac{(x^۲+۳x-۱)(۲x+۱)}{(x+۲)^۲(x-۱)}\ ,\ x\neq۲$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to۲}(f\times g)(x)=\lim_{x\to۲}\frac{(x^۲+۳x-۱)(۲x+۱)}{(x+۲)^۲(x-۱)}=\frac{۹\times۵}{۴^۲\times۱}=\frac{۴۵}{۱۶}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۰ چون حد صورت کسر صفر است ولی حد کسر صفر نیست، پس باید حد مخرج آن هم صفر باشد، بنابراین:

$$\lim_{x\to۲}(\sqrt{ax+۱}+b)=۰\Rightarrow\sqrt{۲a+۱}+b=۰\Rightarrow b=-\sqrt{۲a+۱}$$

$$\lim_{x\to۲}\frac{x^۲-۳x+۲}{\sqrt{ax+۱}+b}=\lim_{x\to۲}\frac{(x^۲-۳x+۲)}{\sqrt{ax+۱}-\sqrt{۲a+۱}}\times\frac{\sqrt{ax+۱}+\sqrt{۲a+۱}}{\sqrt{ax+۱}+\sqrt{۲a+۱}}=\lim_{x\to۲}\frac{(x-۲)(x-۱)}{ax+۱-۲a-۱}\times\lim_{x\to۲}(\sqrt{ax+۱}+\sqrt{۲a+۱})$$

$$=\lim_{x\to۲}\frac{\cancel{(x-۲)}(x-۱)}{a\cancel{(x-۲)}}\times(\sqrt{۲a+۱}+\sqrt{۲a+۱})=\frac{۲\sqrt{۲a+۱}}{a}$$

$$\frac{۲\sqrt{۲a+۱}}{a}=\frac{۳}{۲}\Rightarrow۴\sqrt{۲a+۱}=۳a\Rightarrow۱۶(۲a+۱)=۹a^۲\Rightarrow۹a^۲-۳۲a-۱۶=۰\Rightarrow(a-۴)(۹a+۴)=۰\Rightarrow\begin{cases}a=۴\Rightarrow b=-۳\\ a=-\frac{۴}{۹}\Rightarrow b=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

بنابراین $[b]$ یکی از مقادیر -۳ یا -۱ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۱ ابتدا توجه کنید که:

$$f(x)=\tan\frac{x}{۲}-\frac{۱}{\tan\frac{x}{۲}}=\frac{\sin\frac{x}{۲}}{\cos\frac{x}{۲}}-\frac{\cos\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}}=\frac{\sin^{۲}\frac{x}{۲}-\cos^{۲}\frac{x}{۲}}{\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}=\frac{-\cos x}{\frac{۱}{۲}\sin x}$$

بنابراین:

$$g(x)=\frac{-۲}{f(x)}=\frac{-۲\sin x}{-۲\cos x}=\tan x$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^{+}} g(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^{+}}\tan x=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^{-}} g(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^{-}}\tan x=+\infty$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۲ توجه کنید که:

$$\sqrt{x^{۲}+۱}-\sqrt[۳]{x^{۳}+۱}>۰\Rightarrow\sqrt{x^{۲}+۱}>\sqrt[۳]{x^{۳}+۱}$$

$$\Rightarrow(x^{۲}+۱)^{۳}>(x^{۳}+۱)^{۲}\Rightarrow x^{۶}+۳x^{۴}+۳x^{۲}+۱>x^{۶}+۲x^{۳}+۱$$

$$۳x^{۴}-۲x^{۳}+۳x^{۲}>۰\Rightarrow x^{۲}\underbrace{(۳x^{۲}-۲x+۳)}_{\Delta<۰}>۰$$

اگر $x\neq۰$ هر دو عبارت $x^{۲}$ و $۳x^{۲}-۲x+۳$ مثبت هستند، پس نابرابری آخر به ازای هر $x\neq۰$ برقرار است. یعنی اگر $x\to۰^{+}$ یا $x\to۰^{-}$ در هر دو حالت علامت عبارت مخرج $f(x)$ مثبت است، بنابراین:

$$\lim_{x\to۰^{+}} f(x)=\lim_{x\to۰^{-}} f(x)=+\infty$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۳ از روی نمودار معلوم است که:

$$\lim_{x\to\pi^{+}} f(x)=\lim_{x\to\pi^{-}} f(x)=+\infty$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to\pi^{+}} f(x)=\lim_{x\to\pi^{+}}\frac{۲a-۳}{\tan x(\cos x+۱)}=+\infty\xrightarrow{\lim_{x\to\pi^{+}}\tan x(\cos x+۱)=۰^{+}}۲a-۳>۰\Rightarrow a>\frac{۳}{۲}$$

$$\lim_{x\to\pi^{-}} f(x)=\lim_{x\to\pi^{-}}\frac{a-۲}{\tan x(\cos x+۱)}=+\infty\xrightarrow{\lim_{x\to\pi^{-}}\tan x(\cos x+۱)=۰^{-}}a-۲<۰\Rightarrow a<۲$$

بنابراین: $\frac{۳}{۲}<a<۲$.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۴ حد چپ و حد راست تابع f در $x=1$ برابر $-\infty$ است. پس:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{kx^2-kx-(x-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{kx(x-1)-(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(kx-1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^+}\frac{kx-1}{x-1}=-\infty$$

چون $x\to 1^+$ پس $x-1>0$. بنابراین $\lim\limits_{x\to 1^+}(kx-1)<0$ ، پس $k<1$.

به همین ترتیب:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{kx^2-kx+x-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(kx+1)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1^-}\frac{kx+1}{x-1}=-\infty$$

چون $x\to 1^-$ پس $x-1<0$. بنابراین $\lim\limits_{x\to 1^-}(kx+1)>0$ ، پس $k>-1$. بنابراین $k\in(-1,1)$ می‌باشد.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۵ اگر $x\to+\infty$، آن‌گاه $\frac{1}{x}\to 0^+$ و $-\frac{1}{x}\to 0^-$، بنابراین $\left[\frac{1}{x}\right]=0$ و $\left[-\frac{1}{x}\right]=-1$ و در نتیجه:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{0+ax^2+x+1}{-ax^2+2x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^2}{(2-a)x^2}=\frac{a}{2-a}=2$$

$$\Rightarrow a=4-2a\Rightarrow a=\frac{4}{3}$$

همچنین اگر $x\to-\infty$، آن‌گاه $\frac{1}{x}\to 0^-$ و $-\frac{1}{x}\to 0^+$، بنابراین $\left[\frac{1}{x}\right]=-1$ و $\left[-\frac{1}{x}\right]=0$ و در نتیجه:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+ax^2+x+1}{0+2x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-1)x^2}{2x^2}=\frac{a-1}{2}=\frac{\frac{4}{3}-1}{2}=\frac{1}{6}$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۶ توجه کنید که:

$$(x+2)^4=((x+2)^2)^2=(x^2+4x+4)^2=x^4+16x^2+16+8x^3+8x^2+32x$$

$$(x-2)^4=((x-2)^2)^2=(x^2-4x+4)^2=x^4+16x^2+16-8x^3+8x^2-32x$$

$$(x+1)^4=((x+1)^2)^2=(x^2+2x+1)^2=x^4+4x^2+1+4x^3+2x^2+4x$$

$$(x-1)^4=((x-1)^2)^2=(x^2-2x+1)^2=x^4+4x^2+1-4x^3+2x^2-4x$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)^4-(x-2)^4-16x^3+1}{(x+1)^4-(x-1)^4-8x^3+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{16x^3+64x-16x^3+1}{8x^3+8x-8x^3+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{64x}{8x}=8$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۷ ابتدا $g(x)$ را معین می‌کنیم:

$$y=\sqrt[۳]{\frac{mx^۳}{۱+x^۳}}\Rightarrow y^۳=\frac{mx^۳}{۱+x^۳}\Rightarrow y^۳+y^۳x^۳=mx^۳$$

$$x^۳(m-y^۳)=y^۳\Rightarrow x^۳=\frac{y^۳}{m-y^۳}\Rightarrow x=\sqrt[۳]{\frac{y^۳}{m-y^۳}}$$

$$\Rightarrow g(x)=f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{\frac{x^۳}{m-x^۳}}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to+\infty}(f^۳(x)-g^۳(x))=\lim_{x\to+\infty}(\frac{mx^۳}{۱+x^۳}-\frac{x^۳}{m-x^۳})=m+۱=۳\Rightarrow m=۲$$

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۸ تابع $f(x)=\left[\sqrt{x^۲+۲}\right]$ در نقاطی که $\sqrt{x^۲+۲}$ مقداری صحیح شود ناپیوسته است. بنابراین:

$$\sqrt{x^۲+۲}=k\in\mathbb{Z}\Rightarrow x^۲+۲=k^۲$$

$$x^۲=k^۲-۲\Rightarrow x=\sqrt{k^۲-۲}$$

$$۰<x<۵\Rightarrow ۰<\sqrt{k^۲-۲}<۵\Rightarrow ۰<k^۲-۲<۲۵\Rightarrow ۲<k^۲<۲۷$$

$$\xrightarrow{k>۰}\sqrt{۲}<k<\sqrt{۲۷}\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k\in\{۲,۳,۴,۵\}$$

اکنون مقادیر x را معین می‌کنیم:

$$k=۲\Rightarrow x=\sqrt{۲}$$

$$k=۳\Rightarrow x=\sqrt{۷}$$

$$k=۴\Rightarrow x=\sqrt{۱۴}$$

$$k=۵\Rightarrow x=\sqrt{۲۳}$$

پس این تابع در نقاط $\sqrt{۲},\sqrt{۷},\sqrt{۱۴},\sqrt{۲۳}$ از بازهٔ $(۰,۵)$ ناپیوسته است که حاصل‌ضرب آن‌ها برابر $۱۴\sqrt{۲۳}$ است.

(ماز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۱۵۹ **نکته: تابع f را در نقطهٔ $x=c$ پیوسته می‌نامیم، هرگاه: $\lim_{x\to c}f(x)=f(c)$**

$$\lim_{x\to۳^-}f(x)=\lim_{x\to۳^-}(\frac{x^۲-۹}{|x-۳|}+b)=\lim_{x\to۳^-}(\frac{(x-۳)(x+۳)}{-(x-۳)}+b)=\lim_{x\to۳^-}(-x-۳)+b=-۶+b$$

$$\lim_{x\to۳^+}f(x)=\lim_{x\to۳^+}([-x]+۵)=\left[-(۳)^+\right]+۵=-۴+۵=۱$$

$$f(۳)=a+۴$$

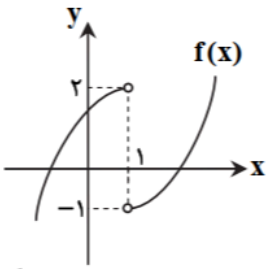
با توجه به نکته داریم:

$$a+۴=-۶+b=۱\Rightarrow\begin{cases}a=-۳\\b=۷\end{cases}\Rightarrow a+b=-۳+۷=۴$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۰ نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ که $m\neq 0$، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{\ell}{m}$

این قانون برای حد چپ و راست در $x=a$ نیز برقرار است.



طبق نمودار $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=-۱$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۲$، بنابراین:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۱^+} g(x)=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{۲x}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to ۱^+}(۲x)}{\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)}=\frac{۲}{-۱}=-۲\\ \lim\limits_{x\to ۱^-} g(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}\frac{۲x}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to ۱^-}(۲x)}{\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)}=\frac{۲}{۲}=۱\end{cases}\Rightarrow ۲\lim_{x\to ۱^+} g(x)-\lim_{x\to ۱^-} g(x)=۲(-۲)-۱=-۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۱ در واقع $\lim\limits_{x\to a^-}[fofof(x)]$ موردنظر است.

بررسی گزینه‌ها:

۱) $\left[fofof(-۱)^-\right]=\left[fof(۰^-)\right]=\left[f(۲^+)\right]=[+\infty]=+\infty$

۲) $\left[fofof(۰^-)\right]=\left[fof(۲^+)\right]=[f(+\infty)]=\left[(-۱)^-\right]=-۲$

۳) $\left[fofof(۲^-)\right]=[fof(-\infty)]=\left[f(-۱)^+\right]=\left[۳^-\right]=۲$

۴) $\left[fofof(۳^-)\right]=\left[fof(۲^+)\right]=[f(+\infty)]=\left[(-۱)^-\right]=-۲$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۲ ابتدا مقدار a را محاسبه می‌کنیم. می‌دانیم:

$$\cos ۲x=\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$$

$$\frac{۱-\tan^۲ x}{a\cos ۲x}=۱\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۱+\tan^۲ x}{a(۱-\tan^۲ x)}=۱\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{۴}}\frac{۱+\tan^۲ x}{a}=۱\Rightarrow\frac{۲}{a}=۱\Rightarrow a=۲$$

خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^۲+۳x|x|}{x^۲-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۲x^۲-۳x^۲}{x^۲-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^۲}{x^۲}=-۱$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۳ ابتدا حاصل حد اول را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۱^+}\left[x^۲-۲x\right]=\lim_{x\to ۱^+}\left[(x-۱)^۲-۱\right]=\lim_{x\to ۱^+}\left[(x-۱)^۲\right]-۱=\left[۰^+\right]-۱=۰-۱=-۱$$

عبارت $x^۲-۳x$ در $x=۱$ برابر -۲ است. تابع در این نقطه نزولی بوده و در نتیجه با زیاد شدن مقدار x حاصل آن کم می‌شود. بنابراین:

$$\lim_{x\to ۱^+}\left[x^۲-۳x\right]=\left[(-۲)^-\right]=-۳$$

خواهیم داشت:

$$-۱-(-۳)=۲$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۴ $f(x)=\frac{۲bx-۲a}{۴ax^۲+bx+۱}$

تابع در $x=-\frac{۱}{۲}$ تعریف نشده ولی دارای حد است. بنابراین $x=-\frac{۱}{۲}$ ریشه صورت و مخرج کسر می‌باشد.

صورت کسر: $-b-۲a=۰\Rightarrow b=-۲a$

مخرج کسر: $a-\frac{b}{۲}+۱=۰\xrightarrow{b=-۲a}۲a+۱=۰\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=۱$

$f(x)=\frac{۲x+۱}{-۲x^۲+x+۱}=\frac{۲x+۱}{(۲x+۱)(-x+۱)}=\frac{۱}{۱-x}$

خواهیم داشت:

در $x=C$ حد تابع ∞ است، بنابراین C ریشهٔ مخرج کسر است، یعنی: $C=۱$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۵ ابتدا $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(\frac{۲}{۱+x})$ را ساده می‌کنیم:

$\lim\limits_{x\to ۱^-} f(\frac{۲}{۱+x})=f(\frac{۲}{۲^-})=f(۱^+)$

حال حد راست تابع f را در $x=۱$ محاسبه می‌کنیم:

$\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{x-۱}{\sqrt[۳]{x}-۱}=\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{(x-۱)(\sqrt[۳]{x^۲}+\sqrt[۳]{x}+۱)}{(x-۱)}=۳$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۶ اگر $۰<x<۱$ باشد، $۱<۳x+۱<۴$ است. تابع $y=[۳x+۱]$ وقتی ۲ یا ۳ است، $۳x+۱$ حد ندارد. یعنی در نقاط $x=\frac{۱}{۳}$ و $x=\frac{۲}{۳}$.

تابع $f(x)$ به شرطی در این نقاط دارای حد است که $x=\frac{۱}{۳}$ و $x=\frac{۲}{۳}$ ریشه‌های صورت کسر یعنی $x^۲+mx+n$ باشند، بنابراین:

$x^۲+mx+n=(x-\frac{۱}{۳})(x-\frac{۲}{۳})=x^۲-x+\frac{۲}{۹}\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\\ n=\frac{۲}{۹}\end{cases}$

خواهیم داشت:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{mx+۱}{(n+۱)x}=\frac{m}{n+۱}=\frac{-۱}{\frac{۲}{۹}+۱}=-\frac{۹}{۱۱}$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۷ $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(m^۲-۱)x^۲+(m-۱)x+۳}{-nx-n}=۲$

$m^۲-۱=۰$ است، زیرا در غیر این صورت درجهٔ صورت از مخرج بیشتر بوده و حاصل حد بی‌نهایت می‌شود.

$m^۲-۱=۰\Rightarrow\begin{cases}m=۱ & \text{غ‌ق‌ق}\\ m=-۱ & \checkmark\end{cases}$

اگر $m=۱$ باشد، حاصل حد یا برابر صفر و یا تعریف نشده (اگر $n=۰$) است. بنابراین:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-۲x+۳}{-nx-n}=۲\Rightarrow\frac{-۲}{-n}=۲\Rightarrow n=۱$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۸ حاصل حد را رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-1}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-1}\times x^{-\frac{1}{6}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-1}{\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}-1}\times\underbrace{\frac{\sqrt[3]{(\sqrt{x}+1)^2}+\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}+1}{\sqrt[3]{(\sqrt{x}+1)^2}+\sqrt[3]{\sqrt{x}+1}+1}}_{3}\times\frac{\overbrace{\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}+1}^{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{x}+1}+1}\times x^{-\frac{1}{6}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt[3]{x}}\times\frac{1}{\sqrt[6]{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\sqrt{x}}{3\sqrt{x}}=\frac{2}{3}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۶۹ اگر $x\to(-\frac{1}{2})^-$، آن‌گاه: $\left[\frac{1}{x^2}\right]=\left[4^-\right]=3$

$$\left[\frac{1}{x}\right]=\left[(-2)^+\right]=-2$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{x^2+ax+\left[\frac{1}{x^2}\right]}{4x-\left[\frac{1}{x}\right]}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{x^2+ax+3}{4x+2}$$

حد مخرج کسر برابر صفر است، بنابراین حد صورت نیز باید صفر باشد.

$$\frac{1}{4}-\frac{a}{2}+3=0\Rightarrow\frac{a}{2}=\frac{13}{4}\Rightarrow a=\frac{13}{2}$$

خواهیم داشت:

$$b=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{x^2+\frac{13}{2}x+3}{4x+2}=\lim_{x\to(-\frac{1}{2})^-}\frac{(x+\frac{1}{2})(x+6)}{4(x+\frac{1}{2})}=\frac{\frac{11}{2}}{4}=\frac{11}{8}\Rightarrow a-4b=\frac{13}{2}-\frac{11}{2}=1$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۰ می‌دانیم: $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$ و $1+\tan^2\frac{x}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}$

خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{(1+\cos x)\sqrt{1+\tan^2\frac{x}{2}}}{\sin x}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{2\cos^2\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\cos\frac{x}{2}\times\frac{1}{\left|\cos\frac{x}{2}\right|}}{\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{\cos\frac{x}{2}\times\frac{1}{-\cos\frac{x}{2}}}{\sin\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{-1}{\sin\frac{x}{2}}=-1$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۱ **روش اول:**

در گزینه‌های ۱ و ۴ عبارت x در ناپیوستگی تاثیری ندارد، زیرا همواره پیوسته است. در واقع برای بررسی پیوستگی فقط به عبارت براکتی می‌پردازیم.

$[x]$ در تمام نقاط صحیح فقط پیوستگی راست دارد و $[-x]$ در تمام نقاط صحیح فقط پیوستگی چپ دارد. بنابراین $t(x)=x-[-x]$ در $x=۲$ فقط از چپ پیوسته است.

روش دوم:

بررسی گزینه‌ها:

۱ $f(x)=x-[x]\Rightarrow \begin{cases} ۲^+ \to ۲-۲=۰ \\ ۲ \to ۲-۲=۰ \\ ۲^- \to ۲-۱=۱ \end{cases}$ پیوسته از راست

۲ $g(x)=[x]+[-x]\Rightarrow \begin{cases} ۲^+ \to ۲-۳=-۱ \\ ۲ \to ۲-۲=۰ \\ ۲^- \to ۱-۲=-۱ \end{cases}$ ناپیوسته از چپ و راست

۳ $h(x)=[x]-[-x]\Rightarrow \begin{cases} ۲^+ \to ۲-(-۳)=۵ \\ ۲ \to ۲-(-۲)=۴ \\ ۲^- \to ۱-(-۲)=۳ \end{cases}$ ناپیوسته از چپ و راست

۴ $t(x)=x-[-x]\Rightarrow \begin{cases} ۲^+ \to ۲-(-۳)=۵ \\ ۲ \to ۲-(-۲)=۴ \\ ۲^- \to ۲-(-۲)=۴ \end{cases}$ پیوسته از چپ

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۲ حد تابع f را در $x=۰$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱+x-\sqrt[۳]{۱-x}}{x}\times\frac{(۱+x)^۲+(۱+x)\sqrt[۳]{۱-x}+\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}}{(۱+x)^۲+(۱+x)\sqrt[۳]{۱-x}+\sqrt[۳]{(۱-x)^۲}}=\lim_{x\to ۰}\frac{(۱+x)^۳-(۱-x)}{۳x}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۳+۳x^۲+۴x}{۳x}=\lim_{x\to ۰}\frac{x(x^۲+۳x+۴)}{۳x}=\frac{۴}{۳}$$

مقدار تابع باید با حد تابع برابر باشد:

$$a+۱=\frac{۴}{۳}\Rightarrow a=\frac{۱}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۳ تابع $\left[\sqrt{x}\right]$ در نقاط $x=۱, x=۴, x=۹, x=۱۶$ ناپیوسته است، زیرا $\sqrt{x}$ در این نقاط مقداری صحیح است. اما تابع $y=(x-k)\left[\sqrt{x}\right]$ در سه نقطه ناپیوسته است. بنابراین k باید یکی از مقادیر $۹,۴,۱$ یا ۱۶ باشد.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۴ نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$، آنگاه $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L$ و برعکس.

با توجه به نکته و فرض سؤال، داریم:

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=۲ \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۲ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱^+}\left(\frac{۱}{x}+b\right)=۱+b=۲ \Rightarrow b=۱ \\ \lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۲ \Rightarrow \lim\limits_{x\to ۱^-}(۳x+a^۳)=۳+a^۳=۲ \Rightarrow a=-۱ \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۲a+b=-۲+۱=-۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۵ نکته: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ، اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$.

در اطراف $x=0$ ، ضابطهٔ تابع f و g به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ -2 & -1\le x<0\end{cases}$$

بنابراین حد چپ و راست تابع $f-g$ در $x=0$ برابر ۱ است.

$$\lim_{x\to 0^+}(f-g)(x)=1-0=1\ ,\quad \lim_{x\to 0^-}(f-g)(x)=-1+2=1$$

پس تابع $f-g$ در $x=0$ حدی برابر ۱ دارد. حد چپ و راست سایر گزینه‌ها با یکدیگر برابر نیست و همچنین گزینهٔ ۴ اصلاً حد راست ندارد، پس در $x=0$ حد ندارد. بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۶ نکته: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$ که $M\neq 0$ ، آنگاه: $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\dfrac{L}{M}$

با استفاده از قوانین حد داریم:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^3+x^2-3x}{3x^2-x-3}=\frac{2(2)^3+2^2-3(2)}{3(2)^2-2-3}=\frac{16+4-6}{12-2-3}=\frac{14}{7}=2$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۷ چون در $x=a$ تابع تعریف نشده است، $x=a$ باید ریشهٔ مخرج باشد، پس $a=2$. همچنین چون حد تابع در $x=2$ برابر یک عدد حقیقی است، باید حد صورت هم در $x=2$ برابر صفر باشد. بنابراین: $x^2+mx+n=0 \xrightarrow{x=2} 4+2m+n=0 \Rightarrow n=-4-2m$

مقدار حد باید برابر ۵ باشد:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+mx-4-2m}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)+m(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2+m)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2+m)=4+m=5$$

$$\Rightarrow m=1 \Rightarrow n=-4-2=-6$$

بنابراین: $a+m-n=2+1+6=9$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۸ نکته: اگر در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای‌اند، داشته باشیم:

$P(a)=Q(a)=0$ دیگر با قانون تقسیم نمی‌توان حد را محاسبه کرد. در این حالت به روش زیر عمل می‌کنیم:

اگر $P(a)=Q(a)=0$ در این صورت $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیرند.

ابتدا عبارت $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ را با تقسیم $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ ساده می‌کنیم و سپس امکان استفاده از قانون تقسیم حدها را بررسی می‌کنیم.

چون مخرج در $x=2$ صفر بوده و حد عبارت برابر عددی متناهی است ، لذا صورت نیز باید صفر شود یعنی عامل $x-2$ را داشته باشد. پس:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+ax+b}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2+a)}{(x-2)(x-1)}=4+a \Rightarrow \begin{cases}4+a=3\\ -2(2+a)=b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=-1\\ b=-2\end{cases} \Rightarrow a+b=-3$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۷۹ چون $P(x)$ چند جمله‌ای است، پس توان همهٔ x های آن عدد حسابی است. پس در تابع $P(x^۲)$ توان همهٔ x ها عدد طبیعی زوج خواهد بود. پس ضریب $x^۳$ و ضریب x در تابع $P(x^۲)$ باید برابر صفر باشند:

$$\begin{matrix} a-۲=۰\Rightarrow a=۲ \\ b+۳=۰\Rightarrow b=-۳ \end{matrix} \Rightarrow P(x^۲)=-۳x^۲+۵$$

بنابراین $P(x)=-۳x+۵$ است. حال باید باقی ماندهٔ تقسیم $P(x^۳-۲)$ بر $x-۳$ را تعیین کنیم:

$$P(x^۳-۲)\xrightarrow{x=۳}P(۲۷-۲)=P(۲۵)=-۳\times ۲۵+۵=-۷۰$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۰ به سراغ بررسی هر یک از گزینه‌ها می‌رویم:

الف) $x>-۱\Rightarrow -۲x<۲\Rightarrow [-۲x]=[۲^-]=۱$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(-۱)^+}\frac{[-۲x]+x}{x^۳+۲x^۲-x-۲}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x+۱}{x^۲(x+۲)-(x+۲)}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x+۱}{(x+۲)(x^۲-۱)}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{x+۱}{(x+۲)(x+۱)(x-۱)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to(-۱)^+}\frac{۱}{(x-۱)(x+۲)}=\frac{۱}{(-۲)(۱)}=\frac{-۱}{۲}$$

پس مورد (الف) درست و مورد (ب) نادرست است.

برای مورد (پ) چون $x\to ۰$ باید هر دو همسایگی $x=۰$ را بررسی کنیم، ابتدا به سراغ همسایگی راست $x=۰$ می‌رویم:

$$x>۰\Rightarrow -۲x<۰\Rightarrow [-۲x]=[۰^-]=-۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۰^+}\frac{[-۲x]+x}{x^۳+۲x^۲-x-۲}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{x-۱}{(x^۲-۱)(x+۲)}=\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{(x+۱)(x+۲)}=\frac{۱}{۲}$$

پس چون حد راست در $x=۰$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است مورد (پ) نادرست می باشد.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۱ با جایگذاری $x=-۲$ درحد داده شده به ابهام $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم و با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x+\sqrt{\frac{x}{۲}+۵}}{۲x+۴}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to -۲}\frac{۱+\frac{\frac{۱}{۲}}{۲\sqrt{\frac{x}{۲}+۵}}}{۲}=\frac{\frac{۹}{۸}}{۲}=\frac{۹}{۱۶}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۲ با جایگذاری $x=m$ به ابهام $\frac{۰}{۰}$ می رسیم و با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to m}\frac{\frac{x}{x+۱}-\frac{m}{m+۱}}{x-m}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to m}\frac{\frac{۱}{(x+۱)^۲}-۰}{۱}=\frac{۱}{(m+۱)^۲}=\frac{۱}{۹}\to (m+۱)^۲=۹\xrightarrow{m\in\mathbb{N}}m=۲$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۳ ابتدا تابع f(x) را به‌دست می‌آوریم و سپس ضابطهٔ fog را مشخص می‌کنیم:

$$f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2}\Rightarrow f(x)=2x-1$$

$$g(x)=\frac{x^2-2}{2x}\Rightarrow f\big(g(x)\big)=2\times\frac{x^2-2}{2x}-1=\frac{x^2-x-2}{x}\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{fog(x)}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x^2-x-2}{x}}{x-2}\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-2x}$$

حالا با جایگذاری $x=2$ در حد فوق به ابهام $\frac{0}{0}$ می رسیم و با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\text{HOP}:\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{2x-2}=\frac{3}{2}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۴ با توجه به نمودار تابع $f(x)=\log_b(a-x)$ ، $x=2$ ریشهٔ عبارت مقابل لگاریتم است و $f(0)=\frac{1}{2}$ می باشد، پس:

$$a-2=0\Rightarrow a=2, f(0)=\log_b(2-0)=\frac{1}{2}\Rightarrow \log_b^2=\frac{1}{2}\Rightarrow \sqrt{b}=2\Rightarrow b=4$$

پس حد داده شده به‌صورت مقابل می‌باشد:

$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{4x+2}{1-\log_4(2-x)}=\frac{-6}{1-\log_4 4^-}=\frac{-6}{1-1^-}=\frac{-6}{0^+}=-\infty$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۵ می‌دانیم $\pi\simeq 3/14$ است، پس $0<\frac{\pi}{6}<1$ است و داریم:

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{6}\right)^+}\frac{a+3[-x]}{1-2\sin x}=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{6}\right)^+}\frac{a+3(-1)}{1-2\sin x}=\frac{a-3}{1-2\left(\frac{1}{2}\right)^+}=\frac{a-3}{0^-}=-\infty\to a-3>0\to a>3$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\left[\frac{x}{a}+x\right]=\left[\frac{1}{2a}+\frac{1}{2}\right]$$

$$a>3\to 0<\frac{1}{a}<\frac{1}{3}\to 0<\frac{1}{2a}<\frac{1}{6}\to\frac{1}{2}<\frac{1}{2a}+\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$$

پس داخل جزء صحیح عددی در محدوده $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$ است که داریم:

$$\left[\frac{1}{2a}+\frac{1}{2}\right]=0$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۶ چون حاصل حد تابع در بی‌نهایت برابر $\frac{۱}{۲}$ اســـت، باید درجهٔ عبارت پرتوان صورت و مخرج یکســـان باشد. پس باید توان $x^{۲n-۵}$ یا $x^{n-۱}$ برابر ۳ باشد.

$$\begin{cases} n-۱=۳ \Rightarrow n=۴ \\ ۲n-۵=۳ \Rightarrow n=۴ \end{cases}$$

$$\xrightarrow{n=۴} f(x)=\frac{ax^۳-x^۲-۲x^۳+x-۱}{۲x^۳-x-۱}=\frac{(a-۲)x^۳-x^۲+x-۱}{۲x^۳-x-۱}$$

در ضمن می‌دانیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{۱}{۲}$ است، پس:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-۲)x^۳-x^۲+x-۱}{۲x^۳-x-۱}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-۲)x^۳}{۲x^۳}=\frac{a-۲}{۲}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow a=۳$$

حالا به سراغ محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to۱} f(x)$ می‌رویم:

$$\lim_{x\to۱}\frac{x^۳-x^۲+x-۱}{۲x^۳-x-۱}\overset{\text{HOP}}{=\!=\!=}\lim_{x\to۱}\frac{۳x^۲-۲x+۱}{۶x^۲-۱}=\frac{۲}{۵}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

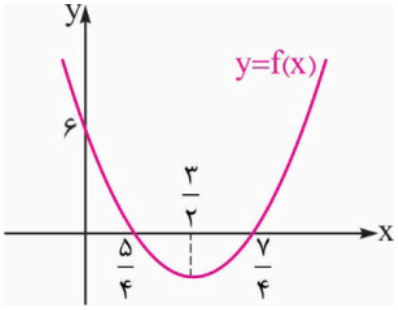
۱۸۷ چون به‌ازای $x=۱$ مخرج حد $\frac{f(۲x)-f(x)}{x^۲-۱}$ برابر صفر می‌شـــود و از طرفی حاصل حد برابر عدد ۳ اســـت، پس $x=۱$ ریشهٔ صورت حد نیز می‌باشد، پس:

$$\xrightarrow{x=۱} f(۲)-f(۱)=۰\Rightarrow f(۲)=f(۱)$$

حالا چون $f(۲)=f(۱)$ است، پس در سهمی داده شده داریم:

$$x_S=\frac{۲+۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

حالا با توجه به نمودار با مشخص بودن x_S و یکی از ریشه‌ها، ریشهٔ دیگر برابر $\frac{۷}{۴}$ به‌دست می آید و ضابطهٔ سهمی را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم:



$$f(x)=k\left(x-\frac{۵}{۴}\right)\left(x-\frac{۷}{۴}\right)\xrightarrow{f(۰)=۶} f(۰)=k\left(-\frac{۵}{۴}\right)\left(-\frac{۷}{۴}\right)=۶$$

$$\Rightarrow k=\frac{۹۶}{۳۵}\Rightarrow f(x)=\frac{۹۶}{۳۵}\left(x-\frac{۵}{۴}\right)\left(x-\frac{۷}{۴}\right)$$

$$\Rightarrow f(۲)=\frac{۹۶}{۳۵}\left(\frac{۳}{۴}\right)\left(\frac{۱}{۴}\right)=\frac{۱۸}{۳۵}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۸ برای آنکه تابع f در $(-۳,+\infty)$ پیوسته باشد، باید در $x=۱$ نیز پیوسته باشد، پس داریم:

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=f(۱)=۴\Rightarrow \lim_{x\to ۱}\frac{x^a-bx+۳}{\sqrt{x+۳}-۲}=۴$$

حال چون به ازای $x=۱$ مخرج حد برابر صفر می‌شود، پس $x=۱$ ریشهٔ صورت حد نیز می‌باشد:

$$\xrightarrow{x=۱} ۱-b+۳=۰\Rightarrow b=۴$$

حالا با استفاده از قاعدهٔ هوپیتال داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^a-۴x+۳}{\sqrt{x+۳}-۲}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to ۱}\frac{ax^{a-۱}-۴}{\frac{۱}{۲\sqrt{x+۳}}}=\frac{a-۴}{\frac{۱}{۴}}$$

$$\Rightarrow ۴(a-۴)=۴\Rightarrow a-۴=۱\Rightarrow a=۵\to a+b=۵+۴=۹$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۸۹ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ ، اگر $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ باشد همواره روی دامنه‌اش غیر یک به یک است، پس این شرط را اعمال می‌کنیم:

$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}\to\frac{k^۲}{۸}=\frac{۶}{k-۱}\Rightarrow k^۲(k-۱)=۴۸\Rightarrow k^۳-k^۲-۴۸=۰\Rightarrow k^۳-۶۴-k^۲+۱۶=۰$$

$$\to (k-۴)(k^۲+۴k+۱۶)-(k-۴)(k+۴)=۰\Rightarrow (k-۴)(\underbrace{k^۲+۳k+۱۲}_{\Delta<۰})=۰\Rightarrow k=۴$$

$$\lim_{x\to k^-}\frac{[x^۲-kx]}{۴-x}=\lim_{x\to ۴^-}\frac{[x^۲-۴x]}{۴-x}=\frac{[۰^-]}{۰^+}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

x		۰		۴
$x^۲-۴x$	$+$	۰	$-$	۰ $+$

توجه: برای محاسبه‌ی حد $[x^۲-۴x]$ در $x=۴$ از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۰ با جایگزاری $x=۲$ به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم، بنابراین با ساده کردن کسر داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۳-۸+\sqrt[۳]{x^۲-۴}}{x^۲-۴+\sqrt[۳]{x-۲}}=\frac{۰}{۰}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x^۲+۲x+۴)+\sqrt[۳]{(x-۲)(x+۲)}}{(x-۲)(x+۲)+\sqrt[۳]{x-۲}}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{x-۲}\left(\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}(x^۲+۲x+۴)+\sqrt[۳]{x+۲}\right)}{\sqrt[۳]{x-۲}\left((x+۲)\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}+۱\right)}=\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}(x^۲+۲x+۴)+\sqrt[۳]{x+۲}}{(x+۲)\sqrt[۳]{(x-۲)^۲}+۱}=\frac{\sqrt[۳]{۴}}{۱}=\sqrt[۳]{۴}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۱ حاصل هر یک از حدها را به صورت مجزا به‌دست می‌آوریم:

$$\left[\lim_{x\to+\infty} f\left(f\left(\frac{۲}{x}\right)\right)\right]=\left[\lim_{x\to۰^+} f(f(x))\right]=[-۲]=-۲$$

حاصل حد عددی مطلق است نه حدی .

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(f(x))\right]=\lim_{x\to(-۲)^+}[f(x)]=\left[۰^+\right]=۰$$

بنابراین حاصل حد داده شده برابر است با:

$$\left[\lim_{x\to+\infty} f\left(f\left(\frac{۲}{x}\right)\right)\right]-\lim_{x\to-\infty}\left[f(f(x))\right]=-۲-۰=-۲\quad\lim_{t\to-۳}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۲

$$\lim_{x\to-۴} f(x)=-۳\to\lim_{x\to-۴} f(x)=t\to t=-۳$$

حد موردنظر : $\lim_{t\to-۳}\frac{\sqrt{-۱۲t}-۶}{۳+t}=\frac{۰}{۰}$

$$:\lim_{t\to-۳}\frac{\left(\sqrt{-۱۲t}-۶\right)}{(۳+t)}\times\frac{\sqrt{-۱۲t}+۶}{\sqrt{-۱۲t}+۶}=\lim_{t\to-۳}\frac{\overbrace{-۱۲(t+۳)}}{\underbrace{-۱۲t-۳۶}}}{(t+۳)(\underbrace{\sqrt{-۱۲t}+۶}_{۱۲})}=-۱$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۳

$$(gof)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{x+۳}{۳x-۱}\right)=\frac{۳\left(\frac{x+۳}{۳x-۱}\right)+۱}{\frac{x+۳}{۳x-۱}+۲}=\frac{۶x+۸}{۷x+۱}\to(gof)(x)=\frac{۶x+۸}{۷x+۱}$$

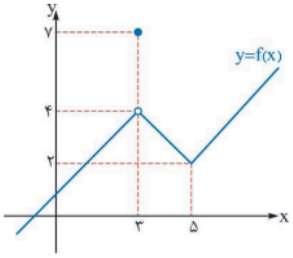
$$(gof)^{-۱}(x)=\frac{-x+۸}{۷x-۶}\qquad\lim_{x\to-\infty}(gof)^{-۱}=\frac{-x}{۷x}=-\frac{۱}{۷}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۴ چون تابع $f\times g$ روی مجموعهٔ اعداد حقیقی پیوسته است، پس در $x=۳$ داریم:

$$\lim_{x\to۳}(f\times g)(x)=(f\times g)(۳)$$

با توجه به نمودار تابع f در شکل مقابل $\lim_{x\to۳} f(x)=۴$ و $f(۳)=۷$ است، پس:



$$\lim_{x\to۳} f(x)\times\lim_{x\to۳} g(x)=f(۳)\times g(۳)\Rightarrow ۴\times۱۴=۷\times g(۳)\Rightarrow g(۳)=۸$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

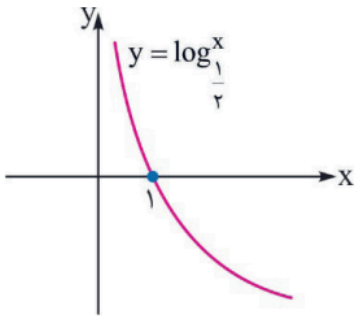
۱۹۵ ابتدا $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱^+}\frac{\pi}{۳x-۱}=\frac{\pi}{۲^+}=\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-$$

حالا به سراغ محاسبه $\lim\limits_{x\to ۱^+} g\big(f(x)\big)$ می‌رویم:

$$\lim_{x\to ۱^+} g\big(f(x)\big)=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-} g(x)=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-}\left(\log_{\frac{۱}{۲}}\tan x\right)$$

در ضمن می دانیم وقتی که $x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-$ آنگاه $\tan x\to+\infty$ ، پس:



$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{۲}\right)^-}\left(\log_{\frac{۱}{۲}}\tan x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\log_{\frac{۱}{۲}} x\right)$$

حالا با توجه به نمودار $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ داریم:

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\log_{\frac{۱}{۲}} x\right)=-\infty$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۶ چون حد تابع در بی‌نهایت برابر $\frac{۱}{۲}$ است، پس درجهٔ عبارت پرتوان صورت و مخرج باید برابر باشد. از طرفی چون $n\in\mathbb{N}$ است فقط به‌ازای $n=۱$ و $n=۲$ حاصل حد برابر عدد می‌شود. در ضمن می‌دانیم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{۱}{۲}$ است و داریم:

$$n=۱\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{(۳x-۲)-۶x^۲+۵}{۶x^۲-۹x+۳}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-۶x^۲+۳x+۳}{۶x^۲-۹x+۳}=-۱ \quad \times$$

$$n=۲\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{(۳x-۲)^۲-۶x^۲+۵}{۶x^۲-۹x+۳}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۳x^۲-۱۲x+۹}{۶x^۲-۹x+۳}=\frac{۱}{۲} \quad \checkmark$$

پس $n=۲$ است، حالا به سراغ محاسبه $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ می‌رویم:

$$\lim_{x\to ۱}\frac{۳x^۲-۱۲x+۹}{۶x^۲-۹x+۳}\overset{\text{HOP}}{=\!=}\lim_{x\to ۱}\frac{۶x-۱۲}{۱۲x-۹}=-۲$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۷ از تغییر متغیر $x=۱-\frac{۱}{t}$ استفاده می‌کنیم، در این صورت $\frac{۱}{t}=۱-x$ پس $t=\frac{۱}{۱-x}$ وقتی t به سمت $+\infty$ میل می‌کند، $\frac{۱}{t}$ مقدار مثبتی دارد اما به صفر میل می‌کند. پس $x=۱-\frac{۱}{t}$ همواره کوچک‌تر از ۱ است اما به ۱ میل می‌کند. به عبارتی داریم $x\to ۱^-$.

$$A=\lim_{t\to+\infty} tf\left(۱-\frac{۱}{t}\right)=\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)}{۱-x}=-\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)}{x-۱}$$

حالا با توجه به آن که $f(۱)=۰$ است، می‌توانیم در صورت کسر به جای $f(x)$ قرار دهیم $f(x)-f(۱)$ و آن را به تعریف مشتق چپ تبدیل کنیم:

$$A=-\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)}{x-۱}=-\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=-f'(۱^-)$$

و برای محاسبه مقدار این حد باید ضابطه تابع f را به‌ازای $x<۱$ در آن قرار دهیم.

$$A=-\lim_{x\to ۱^-}\frac{f(x)}{x-۱}=-\lim_{x\to ۱^-}\frac{(x-۱)^۲}{x-۱}=-\lim_{x\to ۱^-}(x-۱)=۰$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۸ **نکته: تابع f را در $x=c$ از طرف چپ پیوسته می‌نامیم، هرگاه $\lim_{x\to c^-} f(x)=f(c)$. در این صورت گوییم f در $x=c$ پیوستگی چپ دارد.**

شرط آنکه تابع $f(x)$ در $x=۰$ پیوستگی چپ داشته باشد، آن است که $f(۰)=\lim_{x\to ۰^-} f(x)$. اکنون می‌توان نوشت:

$$f(۰)=۲k+۱$$

اکنون می‌توان نتیجه گرفت:

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۲-۵|x|}{۲x^۲+x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x^۲+۵x}{۲x^۲+x}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x(x+۵)}{x(۲x+۱)}=\lim_{x\to ۰^-}\frac{x+۵}{۲x+۱}=۵$$

$$۲k+۱=۵\Rightarrow k=۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۱۹۹ **نکته: در محاسبهٔ $\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند، اگر $P(a)=Q(a)=۰$، باید $P(x)$ و $Q(x)$ را تجزیه کرده تا عامل $(x-a)$ در صورت و مخرج ایجاد شود و با ساده کردن $(x-a)$ از صورت و مخرج، حد به‌دست آید.**

با استفاده از نکتهٔ بالا داریم:

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x^۴+۸x}{x^۲-x-۶}=\lim_{x\to -۲}\frac{x(x^۳+۸)}{x^۲-x-۶}=\lim_{x\to -۲}\frac{x(x+۲)(x^۲-۲x+۴)}{(x+۲)(x-۳)}=\lim_{x\to -۲}\frac{x(x^۲-۲x+۴)}{x-۳}$$

$$=\frac{-۲(۴+۴+۴)}{-۵}=\frac{۲\times ۱۲}{۵}=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۰ ابتدا ضابطهٔ f را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}(۰,-۲m)\in f\\(-۴m,۰)\in f\end{cases}\Rightarrow \text{شیب}=\frac{-۲m-۰}{۰+۴m}=-\frac{۱}{۲}\Rightarrow f(x)=-\frac{۱}{۲}x-۲m$$

اکنون داریم:

$$fof(x)=f(-\frac{۱}{۲}x-۲m)=-\frac{۱}{۲}(-\frac{۱}{۲}x-۲m)-۲m=\frac{۱}{۴}x-m\Rightarrow fof(۲x)=\frac{۱}{۴}(۲x)-m=\frac{۱}{۲}x-m$$

حال تابع $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=-\frac{۱}{۲}x-۲m\Rightarrow y+۲m=-\frac{۱}{۲}x\Rightarrow x=-۲y-۴m\Rightarrow f^{-۱}(x)=-۲x-۴m$$

حال باتوجه‌به حاصل حد، مقدار m را محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۲}\frac{fof(۲x)}{۳x-f^{-۱}(x)}=\lim_{x\to۲}\frac{\frac{۱}{۲}x-m}{۳x+۲x+۴m}=\frac{۱-m}{۱۰+۴m}=-\frac{۱}{۱۸}$$

$$\Rightarrow ۱۸-۱۸m=-۱۰-۴m\Rightarrow ۲۸=۱۴m\Rightarrow m=۲$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۱ ابتدا ضابطهٔ تابع را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}۲x[x] & -۱<x<۱\\ ax^{۳}+b & x\le -۱ \text{ یا } x\ge ۱\end{cases}$$

تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته است؛ بنابراین باید تابع در نقاط $x=-۱$ و $x=۱$ پیوسته باشد، پس داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-۱^{+}}f(x)=\lim\limits_{x\to-۱^{+}}۲x[x]=-۲(-۱)=۲\\ \lim\limits_{x\to-۱^{-}}f(x)=a(-۱)^{۳}+b=-a+b\end{cases}\Rightarrow -a+b=۲\ (۱)$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to۱^{-}}f(x)=\lim\limits_{x\to۱^{-}}۲x[x]=۲(۰)=۰\\ \lim\limits_{x\to۱^{+}}f(x)=a(۱)^{۳}+b=a+b\end{cases}\Rightarrow a+b=۰\ (۲)$$

حال باتوجه‌به روابط (۱) و (۲) داریم:

$$\begin{cases}-a+b=۲\\ a+b=۰\end{cases}\Rightarrow b=۱\ ,\ a=-۱\Rightarrow ab=-۱$$

دقت کنید تابع $y=۲x[x]$ در $x=۰$ پیوسته است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۲ تابع $y=\left[\frac{x}{۲}\right]$، وقتی $\frac{x}{۲}\in\mathbb{Z}$ باشد، ناپیوسته است؛ بنابراین:

$$\frac{x}{۲}=k\ ,\ k\in\mathbb{Z}\ \Rightarrow\ x=۲k\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

پس تابع $y=\left[\frac{x}{۲}\right]$ در اعداد صحیح زوج ناپیوسته است.

تابع $f(x)=(۲x^۲+ax+b)\left[\frac{x}{۲}\right]$ روی بازهٔ $(۲,۸)$ پیوسته است. از طرفی تابع $y=\left[\frac{x}{۲}\right]$، در اعداد $x=۴$ و $x=۶$ از این بازه ناپیوسته است. پس $x=۴$ و $x=۶$، صفرهای تابع $y=۲x^۲+ax+b$ هستند. بنابراین:

$$۲x^۲+ax+b=۰\ \Rightarrow\ \begin{cases}\text{جمع ریشه‌ها}=۱۰\ \Rightarrow\ -\frac{a}{۲}=۱۰\ \Rightarrow\ a=-۲۰\\ \text{ضرب ریشه‌ها}=۲۴\ \Rightarrow\ \frac{b}{۲}=۲۴\ \Rightarrow\ b=۴۸\end{cases}\ \Rightarrow\ b-a=۶۸$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۳ حد صورت و مخرج وقتی x به‌سمت ۲ میل می‌کند برابر صفر است. پس باید عامل $x-۲$ را در صورت و مخرج ظاهر کنیم. برای تجزیهٔ عبارت $x^۳-۵x+۲$، کافی است آن را بر عامل $x-۲$ تقسیم کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^۳-۵x+۲ & x-۲ \\ \hline -(x^۳-۲x^۲) & x^۲+۲x-۱ \\ \hline ۲x^۲-۵x+۲ & \\ -(۲x^۲-۴x) & \\ \hline -x+۲ & \\ -(-x+۲) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

اکنون حاصل حد را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to۲}\frac{(x^۲-۴)(x^۳-۵x+۲)}{x^۲-۴x+۴}=\lim_{x\to۲}\frac{(x-۲)(x+۲)(x-۲)(x^۲+۲x-۱)}{(x-۲)^۲}=\lim_{x\to۲}(x+۲)(x^۲+۲x-۱)=(۴)(۷)=۲۸$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۴ در حد داده‌شده، حد صورت در $x=۱$ برابر صفر است و از طرفی حاصل حد غیرصفر است. پس حد مخرج در $x=۱$ برابر صفر است؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to۱}x-a=۱-a=۰\ \Rightarrow\ a=۱$$

اکنون حاصل حد را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to۱}\left(\frac{\sqrt{۲\sqrt{x}+۲x}-۲\sqrt{x}}{x-۱}\times\frac{\sqrt{۲\sqrt{x}+۲x}+۲\sqrt{x}}{\sqrt{۲\sqrt{x}+۲x}+۲\sqrt{x}}\right)=\lim_{x\to۱}\frac{۲\sqrt{x}+۲x-۴x}{(x-۱)(\sqrt{۲\sqrt{x}+۲x}+۲\sqrt{x})}$$

$$=\lim_{x\to۱}\frac{۲\sqrt{x}-۲x}{x-۱}\times\lim_{x\to۱}\frac{۱}{\sqrt{۲\sqrt{x}+۲x}+۲\sqrt{x}}=\lim_{x\to۱}\frac{۲\sqrt{x}(۱-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)}\times\frac{۱}{۴}=\lim_{x\to۱}\frac{-۲\sqrt{x}}{\sqrt{x}+۱}\times\frac{۱}{۴}=-۱\times\frac{۱}{۴}=-\frac{۱}{۴}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۵ باتوجه‌به شکل، $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۴$ و از طرفی $x = ۱$ ریشهٔ مخرج تابع f است، پس $x = ۱$ ریشهٔ صورت تابع f نیز می‌باشد؛ بنابراین:

$$\sqrt{ax^۲+b}-۲=۰ \xrightarrow{x=۱} \sqrt{a+b}-۲=۰ \Rightarrow \sqrt{a+b}=۲ \Rightarrow a+b=۴ \Rightarrow b-۴=-a \quad (*)$$

اکنون داریم:

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{\sqrt{ax^۲+b}-۲}{x-۱}\times\frac{\sqrt{ax^۲+b}+۲}{\sqrt{ax^۲+b}+۲}\right)=\lim_{x\to ۱}\frac{ax^۲+b-۴}{x-۱}\times\lim_{x\to ۱}\frac{۱}{\sqrt{ax^۲+b}+۲}=۴$$

$$\xrightarrow{(*)} \lim_{x\to ۱}\frac{ax^۲-a}{x-۱}\times\frac{۱}{\underbrace{\sqrt{a+b}}_{۲}+۲}=\lim_{x\to ۱}\frac{a\cancel{(x-۱)}(x+۱)}{\cancel{x-۱}}\times\frac{۱}{۴}=۲a\times\frac{۱}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{۲}=۴ \Rightarrow a=۸ \xrightarrow{(*)} b-۴=-۸ \Rightarrow b=-۴$$

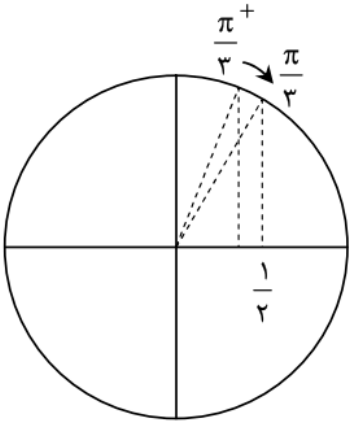
بنابراین مقدار خواسته‌شدهٔ سؤال برابر است با: $۳a+۴b=۲۴-۱۶=۸$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۶ حاصل حد برابر $-\infty$ است، پس مخرج کسر به‌ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ برابر صفر است:

$$a\cos ۲x+۴=۰ \xrightarrow{x=\frac{\pi}{۶}} a\cos\frac{\pi}{۳}+۴=۰ \Rightarrow \frac{a}{۲}+۴=۰ \Rightarrow a=-۸$$

با رسم دایرهٔ مثلثاتی داریم:



$$x\to\frac{\pi}{۶}^{+} \Rightarrow \cos ۲x\to\frac{۱}{۲}^{-} \Rightarrow \cos ۲x<\frac{۱}{۲}$$
$$\Rightarrow -۸\cos ۲x>-۴ \Rightarrow -۸\cos ۲x+۴>۰$$

اکنون داریم:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۶}^{+}}\frac{b-۸\sin^۲ x}{-۸\cos ۲x+۴}=\frac{b-۸(\frac{۱}{۴})}{۰^{+}}=\frac{b-۲}{۰^{+}}=-\infty$$

پس باید $b-۲<۰$ و در نتیجه $b<۲$ و بیشترین مقدار صحیح b برابر ۱ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۷ نکتهٔ ۱: حد یک تابع چندجمله‌ای در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

نکتهٔ ۲: اگر در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a}P(x)=\lim\limits_{x\to a}Q(x)=۰$، ابتدا $P(x)$ و $Q(x)$ را تجزیه می‌کنیم و عامل $x-a$ را از صورت و مخرج ساده می‌نماییم؛ سپس از قضیهٔ حد تقسیم استفاده می‌نماییم.

از آنجایی که در همسایگی چپ $x=۳$، عدد جزء صحیح دقیقاً ۲ می‌باشد، مقدار آن را در حد جای‌گذاری می‌کنیم و داریم:

$$\text{حد خواسته‌شده}=\lim_{x\to ۳^{-}}\frac{۲x-۶}{x^۳-۳x^۲}=\lim_{x\to ۳^{-}}\frac{۲(x-۳)}{x^۲(x-۳)}=\frac{۲}{۹}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۸ نکته: $a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$ ، $|x|=\begin{cases}x & x\geq ۰\\ -x & x<۰\end{cases}$

حد راست و چپ تابع را با توجه به تعریف قدرمطلق در $x=-۲$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -۲^+}\frac{a(x^۳+۸)}{|x+۲|}=\lim_{x\to -۲^+}\frac{a(x+۲)(x^۲-۲x+۴)}{(x+۲)}=a\times(۴+۴+۴)=۱۲a$$

$$\lim_{x\to -۲^-}\frac{a(x^۳+۸)}{|x+۲|}=\lim_{x\to -۲^-}\frac{a(x+۲)(x^۲-۲x+۴)}{-(x+۲)}=-a(۴+۴+۴)=-۱۲a$$

اختلاف دو حد برابر ۶ است؛ پس:

$$|۱۲a-(-۱۲a)|=۶\Rightarrow |۲۴a|=۶\Rightarrow ۲۴a=\pm ۶\Rightarrow a=\pm\frac{۱}{۴}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۰۹ نکته: $\lim\limits_{x\to x_۰} f(x)=L$ ، اگر و تنها اگر:

$$\lim_{x\to x_۰^+} f(x)=\lim_{x\to x_۰^-} f(x)=L$$

با توجه به نکتهٔ بالا، باید حد چپ و راست تابع $f(x)$ در $x=۲$ با هم برابر باشند:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^+}(۲m[x]-(m+۱)[-x])=۲m(۲)-(m+۱)(-۳)=۴m+۳m+۳=۷m+۳\\ \lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۲^-}(۲m[x]-(m+۱)[-x])=۲m(۱)-(m+۱)(-۲)=۲m+۲m+۲=۴m+۲\end{cases}$$

از تساوی این دو مقدار داریم:

$$۷m+۳=۴m+۲\Rightarrow ۳m=-۱\Rightarrow m=-\frac{۱}{۳}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۰ نکته: تابع $f(x)=[x]$ در نقاطی که $x\in\mathbb{Z}$ باشد ناپیوسته است.

اگر فرض کنیم $g(x)=۲\sqrt{۲x}$، آن‌گاه $g(۲)=۴$ و وقتی $g(x)=۵$ شود، آن‌گاه اولین نقطهٔ ناپیوستگی برای f ایجاد می‌شود؛ پس:

$$۲\sqrt{۲x}=۵\Rightarrow \sqrt{۲x}=\frac{۵}{۲}\Rightarrow ۲x=\frac{۲۵}{۴}\Rightarrow x=\frac{۲۵}{۸}$$

پس $\frac{۲۵}{۸}$ طول اولین نقطهٔ ناپیوستگی f بعد از $x=۲$ است؛ بنابراین:

$$۲+\alpha=\frac{۲۵}{۸}\Rightarrow \alpha=\frac{۲۵}{۸}-۲=\frac{۹}{۸}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۱ صورت و مخرج به‌ازای $x=۲$ برابر صفر هستند؛ بنابراین با تقسیم‌کردن صورت و مخرج بر $x-۲$، کسر را ساده می‌کنیم:

$$\begin{array}{r|l} x^۳-۳x-۲ & x-۲ \\ \hline -(x^۳-۲x^۲) & x^۲+۲x+۱ \\ \hline ۲x^۲-۳x-۲ & \\ -(۲x^۲-۴x) & \\ \hline x-۲ & \\ -(x-۲) & \\ \hline ۰ & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -x^۲+x+۲ & x-۲ \\ \hline -(-x^۲+۲x) & -x-۱ \\ \hline -x+۲ & \\ -(-x+۲) & \\ \hline ۰ & \end{array}$$

بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲}=\frac{x^۳-۳x-۲}{-x^۲+x+۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x-۲)(x^۲+۲x+۱)}{(x-۲)(-x-۱)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۲x+۱}{-x-۱}=\frac{۹}{-۳}=-۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۲ نکته: فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x)=L\neq ۰$ و $\lim_{x\to a} g(x)=۰$، در این صورت:

الف) اگر $L>۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$.

ب) اگر $L>۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

پ) اگر $L<۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$.

ت) اگر $L<۰$ و تابع $g(x)$ در همسایگی محذوفی از a منفی باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$.

صورت کسر یک چندجمله‌ای است و حد راست و چپ تابع در $x=\frac{۱}{۲}$ برابر $+\infty$ است؛ پس مخرج کسر در $x=\frac{۱}{۲}$ تغییر علامت نداده است و $x=\frac{۱}{۲}$ ریشهٔ مضاعف مخرج است، اما ریشهٔ صورت نیست؛ بنابراین:

$$\text{مخرج}=b(x-\frac{۱}{۲})^۲=b(x^۲-x+\frac{۱}{۴})=bx^۲-bx+\frac{b}{۴}$$

از مقایسهٔ مخرج با عبارت به‌دست آمده داریم:

$$bx^۲-bx+\frac{b}{۴}=bx^۲-(a+۳)x+a \Rightarrow b=a+۳ \Rightarrow a-b=-۳$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۳ نکتهٔ ۱: فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 0$،

در این‌صورت اگر $L < 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی

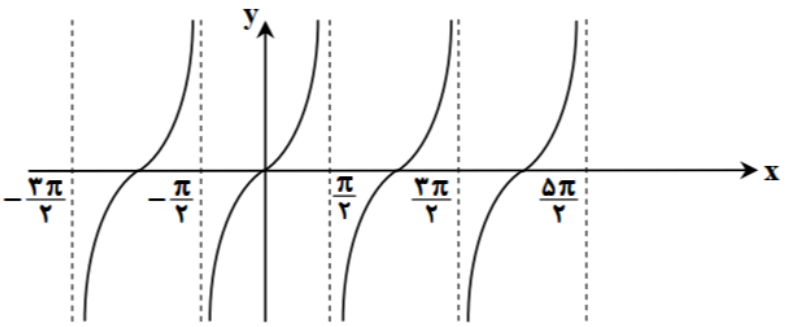
محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$

نکتهٔ ۲: فرض کنیم $\lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ و $\lim_{x\to a} g(x) = 0$،

در این‌صورت اگر $L > 0$ و تابع $g(x)$ در همسایگی

محذوفی از a مثبت باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$

نکتهٔ ۳: نمودار تابع $y = \tan x$ به‌شکل زیر است:



هریک از گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱: نادرست- $\lim_{x\to \frac{3\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$

گزینهٔ ۲: درست- $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty$

گزینهٔ ۳: نادرست- $\lim_{x\to 2} \frac{-x}{|x-2|} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

گزینهٔ ۴: نادرست- $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^3+3x^2+3x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)^3} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

بنابراین گزینهٔ ۲ پاسخ صحیح است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۴ نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. در این حالت برای محاسبهٔ حد در نقطهٔ a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفرشدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده‌کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

$$\lim_{x\to -3} \frac{2a(x+3)}{1-\sqrt{3x+10}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -3} \frac{2a(x+3)}{1-\sqrt{3x+10}} \times \frac{1+\sqrt{3x+10}}{1+\sqrt{3x+10}} = \lim_{x\to -3} \frac{2a(x+3)(1+\sqrt{3x+10})}{1-3x-10} = \lim_{x\to -3} \frac{2a(\cancel{x+3})(2)}{-3(\cancel{x+3})} = \frac{4a}{-3} = 3 \Rightarrow a = \frac{-9}{4}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۵ نکتهٔ ۱: اگر $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ (L عدد حقیقی) و $\lim_{x\to a} g(x) = 0$، آن‌گاه: $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

نکتهٔ ۲: $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$

چون با جای‌گذاری $x = -1$ در کسر، مخرج صفر است، پس صورت هم به ازای $x = -1$ برابر صفر است و داریم:

$$\sqrt[3]{-1}+a = 0 \Rightarrow a = 1$$

حال برای به‌دست‌آوردن حاصل حد (یعنی b) داریم:

$$\lim_{x\to -1} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{x^2+3x+2} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{(x+1)(x+2)(3)} = \frac{1}{3}$$

پس $b = \frac{1}{3}$؛ بنابراین: $a-b = \frac{2}{3}$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۶ نکته: گاهی صورت یا مخرج تابع $\frac{f}{g}$ شامل یک عبارت رادیکالی است و $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. در این حالت برای محاسبهٔ حد در $\frac{f}{g}$ نقطهٔ a لازم است ابتدا صورت و مخرج را در یک عبارت رادیکالی ضرب کنیم تا عامل $(x-a)$ یا عبارتی که موجب صفرشدن f و g شده است، در صورت و مخرج ظاهر شود تا با ساده‌کردن آن از صورت و مخرج، بتوانیم مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آوریم.

حد موردنظر از نوع صفر صفرم و مبهم است. برای رفع ابهام، صورت و مخرج کسر را در عبارت مناسب ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2} \frac{1+\sqrt[3]{\sqrt{2x}-3}}{x-2} \times \frac{1-\sqrt[3]{\sqrt{2x}-3}+\sqrt[3]{(\sqrt{2x}-3)^2}}{1-\sqrt[3]{\sqrt{2x}-3}+\sqrt[3]{(\sqrt{2x}-3)^2}} = \lim_{x\to 2} \frac{1+\sqrt{2x}-3}{(x-2)\times(1-(-1)+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{2x}-2}{(x-2)\times 3} \times \frac{\sqrt{2x}+2}{\sqrt{2x}+2}$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{2x-4}{3(x-2)\times(2+2)} = \lim_{x\to 2} \frac{2(x-2)}{3(x-2)\times 4} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۷ نکته: اگر در محاسبهٔ $\lim_{x\to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای‌اند، داشته باشیم:

$P(a) = Q(a) = 0$ دیگر با قانون تقسیم نمی‌توان حد را محاسبه کرد. در این حالت به روش زیر عمل می‌کنیم:

اگر $P(a) = Q(a) = 0$ در این صورت $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیرند.

ابتدا عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را با تقسیم $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ ساده می‌کنیم و سپس امکان استفاده از قانون تقسیم حدها را بررسی می‌کنیم.

f یک سهمی است به‌طوری که:

$$f(x) = k(x-1)^2 - 2$$

از طرفی $f(0) = 0$، پس:

$$k-2 = 0 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow f(x) = 2(x-1)^2 - 2$$

از طرفی ضابطهٔ تابع خطی g با داشتن ۲ نقطه معلوم است؛ پس:

$$g(x) = x-2$$

اکنون داریم:

$$\lim_{x\to 2} \frac{g(x)-f(x)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2-2(x-1)^2+2}{4(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-2x^2+5x-2}{4(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(-2x+1)}{4(x-2)} = -\frac{3}{4}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۱۸ با استفاده از اتحاد مزدوج و اتحاد چاق و لاغر ابتدا صورت و مخرج را تجزیه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 x - (1-\cos^2 x)}{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x)}$$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x+\cos x)(\cos x-\sin x)}{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x)}$$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x-\sin x)}{(1-\sin x\cos x)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-(-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

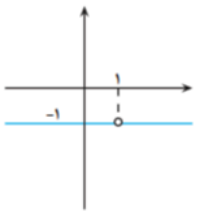
۲۱۹ ابتدا تابع f را به‌صورت دو ضابطه‌ای می‌نویسیم، سپس ضابطهٔ $f(g(x))$ را به‌دست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{|x-۲|}{x-۲}=\begin{cases}\frac{x-۲}{x-۲}=۱ & x>۲\\ \frac{-(x-۲)}{x-۲}=-۱ & x<۲\end{cases}$$

می‌دانیم که در تابع $f(g(x))$، خروجی تابع g، ورودی تابع f است. بنابراین برد (خروجی) هر کدام از ضابطه‌های $g(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{array}{l}x>۱\to x^۲>۱\to -x^۲<-۱\to -x^۲+۲<۱\\ \xrightarrow{g(x)<۱} f(g(x))=-۱\\ x<۱\to ۲x<۲\to ۲x-۳<-۱\\ \xrightarrow{g(x)<-۱} f(g(x))=-۱\end{array}\right\}\Rightarrow f(g(x))=-۱$$

$$D_{fog}=R-\{۱\}$$



واضح است که تابع fog در همهٔ نقاط از دامنهٔ خود حد دارد.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۰ چون حاصل حد برابر $+\infty$ است بنابراین مخرج کسر در $x\to\frac{\pi}{۲}$ برابر صفر می‌گردد.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}} a\sin x-b=۰\to a\sin\frac{\pi}{۲}-b=۰\to a=b$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{b+۳}{b\sin x-b}=\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{b+۳}{b}\times\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{۱}{\sin x-۱}=\frac{b+۳}{b}\times -\infty=+\infty$$

بنابراین:

$$\frac{b+۳}{b}<۰\to -۳<b<۰\to -۳<a<۰$$

a شامل دو مقدار صحیح است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۱ حاصل حد تابع f در $x\to\infty$ عددی غیرصفر شده است، پس درجهٔ پرتوان‌های صورت و مخرج باید مساوی باشند، پس:

$$m-۲=۳\to m=۵$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{kx^۳}{۳x^۳}=\frac{۲}{۵}\to\frac{k}{۳}=\frac{۲}{۵}\to k=\frac{۶}{۵}=۱/۲$$

$$k+m=۱/۲+۵=۶/۲$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۲

$$\lim_{x\to-۱^-}\frac{|x|[x]+۲}{|x^۳+۱|}=\lim_{x\to-۱^-}\frac{(-x)(-۲)+۲}{-(x^۳+۱)}$$

$$=\lim_{x\to-۱^-}\frac{۲x+۲}{-(x^۳+۱)}=\frac{۰}{۰}\text{مبهم}$$

$$\xrightarrow{\text{رفع ابهام}}\lim_{x\to-۱^-}\frac{۲(x+۱)}{-(x+۱)(x^۲-x+۱)}=\frac{۲}{-(۱+۱+۱)}=-\frac{۲}{۳}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۳

$$\lim_{x\to(-۴)^+}([-\frac{x}{۲}]-[\frac{x+۱}{۳}])=[۲^-]-[(-۱)^+]=۱-(-۱)=۲$$

$$\lim_{x\to(-۴)^-}([-\frac{x}{۲}]-[\frac{x+۱}{۳}])=[۲^+]-[(-۱)^-]=۲-(-۲)=۴$$

$$f(-۴)=۲-(-۱)=۳$$

تابع f نه پیوستگی راست دارد و نه چپ.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۴ از شرط $f(۱)=-۱$ و $f(۳)=\frac{-۱}{۲}$ داریم: $m=\frac{\frac{-۱}{۲}-(-۱)}{۳-۱}=\frac{۱}{۴}$ = شیب. پس $f(x)=\frac{۱}{۴}x-\frac{۵}{۴}$ و بنابراین:

$$f^{-۱}(x)=۴x+۵$$

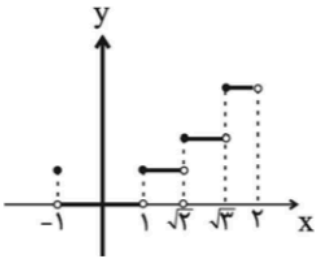
$$f(۲x)=\frac{۱}{۲}x-\frac{۵}{۴} \qquad f(|x|)=\frac{۱}{۴}|x|-\frac{۵}{۴}$$

پس وقتی $x\to-\infty$ با انتخاب جملات پرتوان حاصل حد برابر است با:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x-\frac{۱}{۲}x}{\frac{۱}{۴}(-x)-x}=\frac{\frac{۷}{۲}x}{\frac{-۵}{۴}x}=\frac{\frac{۷}{۲}}{\frac{-۵}{۴}}=-۲/۸$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۵ ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



مطابق شکل نمودار تابع در نقاط به طول $x=-۱$، $x=۱$، $x=\sqrt{۲}$ و $x=\sqrt{۳}$ ناپیوسته است. بنابراین اگر بخواهیم تابع در ۳ نقطه ناپیوسته باشد، بیشترین مقدار a برابر با $\sqrt{۳}$ خواهد بود. در این بازه نقاط به طول $x=۱$ و $x=\sqrt{۲}$ فقط از راست پیوسته هستند. بنابراین:

$$b=۲$$

حال بیشترین مقدار $a+b$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\max(a+b)=\sqrt{۳}+۲$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

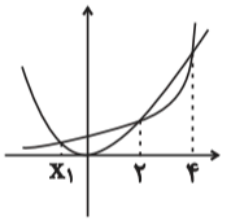
۲۲۶ نمودار $\frac{۳x^۲+۱}{x^۲}=۳+\frac{۱}{x^۲}$ در اطراف $\frac{۱}{۳}$ نزولی است، پس در $(\frac{۱}{۳})^-$ حد آن ۱۲ است. و $۶-\frac{۲}{x}$ هم اطراف $\frac{۱}{۳}$ صعودی است، پس در $(\frac{۱}{۳})^-$، صفر منفی است یعنی داریم:

$$\frac{-۱۲(\frac{۱}{۳})+a}{۰^-}=+\infty$$

و در نتیجه: $a-۴<۰$ و $a<۴$ است. پس: $a=۱,۲,۳$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۷ نمودار $x^۲$ و ۲^x در سه نقطهٔ $x=۴$ و $x=۲$ و $x_۱$ برخورد دارد. با توجه به $\lim_{x\to a^+}\frac{x}{۲^x-x^۲}=+\infty$، اگر a منفی باشد باید در a^+ داشته باشیم $۲^x<x^۲$ که در $x_۱$ این‌طور نیست و اگر a مثبت باشد در a^+ باید داشته باشیم $۲^x>x^۲$ پس $a=۴$ است. حالا داریم:



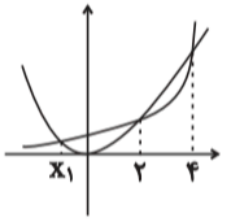
$$x^۴-۴x^۲+۱=۰ \;:x^۲=t \;\to t^۲-۴t+۱=۰$$

که اگر ریشه‌ها $t_۱$ و $t_۲$ باشند، ریشه‌های معادلهٔ اصلی $\pm\sqrt{t_۱},\pm\sqrt{t_۲}$ است و جمع مربعات آن‌ها برابر است با:

$$t_۱+t_۱+t_۲+t_۲=۲(t_۱+t_۲)=۲(۴)=۸$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۸ نمودار $x^۲$ و ۲^x در سه نقطهٔ $x=۴$ و $x=۲$ و $x_۱$ برخورد دارد. با توجه به $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{x}{۲^x-x^۲}=+\infty$، اگر a منفی باشد باید در a^+ داشته باشیم $۲^x<x^۲$ که در $x_۱$ این‌طور نیست و اگر a مثبت باشد در a^+ باید داشته باشیم $۲^x>x^۲$ پس $a=۴$ است. حالا داریم:



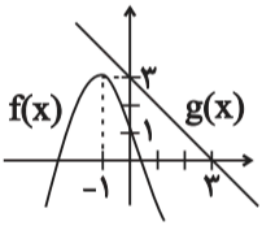
$$x^۴-۴x^۲+۱=۰ \;:x^۲=t \;\to t^۲-۴t+۱=۰$$

که اگر ریشه‌ها $t_۱$ و $t_۲$ باشند، ریشه‌های معادلهٔ اصلی $\pm\sqrt{t_۱},\pm\sqrt{t_۲}$ است و جمع مربعات آن‌ها برابر است با:

$$t_۱+t_۱+t_۲+t_۲=۲(t_۱+t_۲)=۲(۴)=۸$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۲۹ با توجه به نمودار جملهٔ پرتوان $f(x)=-۲x^۲-۴x+۱$ برابر با $-۲x^۲$ و معادلهٔ خط g به‌صورت $y=-x+۳$ است. در بی‌نهایت فقط جملات پرتوان صورت و مخرج مؤثر هستند، پس داریم:



$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-۲x^۲}{x|-x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۲x^۲}{-x^۲}=۲$$

توجه داشته باشید چون عبارت داخل قدرمطلق در $-\infty$ به‌صورت $-(-\infty)$ است که چون داخل قدرمطلق منفی‌درمنفی، مثبت می‌شود خود عبارت یعنی $-x$ از قدرمطلق خارج می‌شود:

$$|u|=\begin{cases}u & ,\ u\geq ۰\\ -u & ,\ u<۰\end{cases}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۰ $$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{۲x^۲+۵x-۱}{x^۲+۲x+۳}\right)=\lim_{x\to-\infty}f\left(\frac{۲x^۲+۴x+۶+x-۷}{x^۲+۲x+۳}\right)=\lim_{x\to-\infty}f\left(۲+\frac{x-۷}{x^۲+۲x+۳}\right)=f(۲+۰^-)=f(۲^-)=۱$$

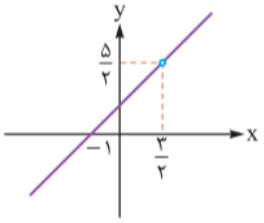
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۱ $$\lim_{x\to۱^+}f(x)=\lim_{x\to(-\infty)}f\left(\frac{x-۱}{x+۱}\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳|x|+۲}{x+۷}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۳x+۲}{x+۷}=-۳$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۳۲ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** نمودار تابع $f(x)=\frac{ax^۲+bx+c}{۲x-۳}$ دارای حفره یا نقطهٔ توخالی است، طول نقطهٔ توخالی هم ریشهٔ صورت است و هم ریشهٔ مخرج، با توجه به این موضوع اگر $x=\alpha$ طول نقطهٔ توخالی باشد، خواهیم داشت:

مخرج: $۲\alpha-۳=۰ \Rightarrow \alpha=\frac{۳}{۲}$



گام دوم: نمودار تابع $f(x)=\frac{ax^۲+bx+c}{۳x-۲}$ به صورت یک تابع خطی است که در یک نقطه حفره دارد. از آن‌جا که فرم کلی تابع خطی به صورت $y=mx+n$ می‌باشد و این‌که دو نقطه از f را داریم، ضابطه‌اش را پیدا می‌کنیم:

$$\begin{cases}(\frac{۳}{۲},\frac{۵}{۲}) \Rightarrow m(\frac{۳}{۲})+n=\frac{۵}{۲} \Rightarrow \frac{۳}{۲}m+n=\frac{۵}{۲} \\ (-۱,۰) \Rightarrow m(-۱)+n=۰ \Rightarrow -m+n=۰\end{cases} \Rightarrow m=۱, n=۱$$

پس ضابطهٔ تابع خطی f ، برابر $f(x)=x+۱$ است.

گام سوم: خواستهٔ سؤال $f(-۲)$ است که برابر می‌شود با:

$$f(x)=x+۱ \Rightarrow f(-۲)=-۲+۱=-۱$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۳۳ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** می‌دانیم $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ و هم‌چنین دامنهٔ $(f+g)(x)$ نیز برابر است با اشتراک دامنه‌های f و g.

با توجه به این موضوعات ضابطهٔ $(f+g)(x)$ را می‌نویسیم:

$$(f+g)(x)=\begin{cases}(x)+(-۲x) & x \geq a+۱ \\ (x+۱)+(x-۲a) & x<a+۱\end{cases} \Rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases}-x & x \geq a+۱ \\ ۲x-۲a+۱ & x<a+۱\end{cases}$$

گام دوم: به گفتهٔ سؤال تابع $(f+g)$ بر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است، پس در نقطهٔ مرزی $a+۱$ نیز باید پیوسته باشد؛ بنابراین مقدار، حد چپ و حد راست تابع $(f+g)$ در $x=a+۱$ را به دست می‌آوریم و با هم برابر قرار می‌دهیم:

$$(f+g)(a+۱)=\lim_{x\to(a+۱)^+}(f+g)(x)=-(a+۱)=-a-۱$$

$$\lim_{x\to(a+۱)^-}(f+g)(x)=۲(a+۱)-۲a+۱=۲a+۲-۲a+۱=۳$$

$$\Rightarrow -a-۱=۳ \Rightarrow a=-۴$$

پس به ازای $a=-۴$ تابع $(f+g)(x)$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۳۴ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** با جای‌گذاری $x=۱$ متوجه می‌شویم که با حد $\frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ مواجه هستیم، پس عبارت‌ها را تا حد ممکن تجزیه می‌کنیم:

$$x-۲\sqrt{x}+۱=(\sqrt{x}-۱)^۲$$

$$x^۲-۱=(x-۱)(x+۱)=(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(x+۱)$$

$$x^۳-۱=(x-۱)(x^۲+x+۱)=(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(x^۲+x+۱)$$

گام دوم: عبارت‌های تجزیه‌شده را در صورت و مخرج کسر قرار داده و عامل صفرکننده را حذف می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۱^+}\frac{(x^۲-۱)(x^۳-۱)}{x-۲\sqrt{x}+۱}=\lim_{x\to۱^+}\frac{(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(x+۱)(\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}+۱)(x^۲+x+۱)}{(\sqrt{x}-۱)^۲}=۲\times۲\times۲\times۳=۲۴$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۳۵ پاسخ تشریحی

گام اول: تابع f در $x=۲$ می‌تواند با رفع ابهام دارای حد باشد، ولی قطعاً در این نقطه ناپیوسته است. بنابراین $x=۲$ باید ریشهٔ معادلهٔ درجه‌دوم و همین‌طور ریشهٔ صورت کسر $f(x)$ باشد:

$$۴x^۲+ax-۳b=۰ \xrightarrow{x=۲} ۱۶+۲a-۳b=۰ \Rightarrow ۲a-۳b=-۱۶$$

$$۲x^۲-ax+b=۰ \xrightarrow{x=۲} ۸-۲a+b=۰ \Rightarrow -۲a+b=-۸$$

$$\begin{cases}۲a-۳b=-۱۶\\-۲a+b=-۸\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}b=۱۲\\a=۱۰\end{cases}$$

گام دوم: مقادیر به‌دست‌آمده برای a و b را در خواستهٔ سؤال جای‌گذاری می‌کنیم:

$$[\frac{a-۳b}{۳}]=[\frac{۱۰-۳۶}{۳}]=[-\frac{۲۶}{۳}]=-۹$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۳۶ **گام اول:** ضابطهٔ تابع f را تعیین می‌کنیم. هر دو ضابطهٔ تابع f خطی هستند و هر دو خط از مبدأ مختصات عبور می‌کنند:

$$x<۰: f(x)=ax \xrightarrow{(-۱,-\frac{۳\sqrt{۳}}{\pi})} -\frac{۳\sqrt{۳}}{\pi}=a(-۱) \Rightarrow a=\frac{۳\sqrt{۳}}{\pi}$$

$$x>۰: f(x)=bx \xrightarrow{(۲,-\frac{۳\sqrt{۳}}{\pi})} -\frac{۳\sqrt{۳}}{\pi}=b\times ۲ \Rightarrow b=-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲\pi}$$

با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده، ضابطهٔ تابع f به صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{۳\sqrt{۳}}{\pi}x & ; \ x\le ۰\\ -\frac{۳\sqrt{۳}}{۲\pi}x & ; \ x\ge ۰\end{cases}$$

گام دوم: با توجه به ضابطهٔ تابع f، حد داده‌شده را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{۶})^-}\frac{\cos x}{|f(x)|}+\lim_{x\to(-\frac{\pi}{۶})^+}\frac{|f(x)|}{\cos x}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{|-\frac{۳\sqrt{۳}}{۲\pi}\times\frac{\pi}{۶}|}+\frac{|\frac{۳\sqrt{۳}}{\pi}\times(-\frac{\pi}{۶})|}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۴}}+\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=۲+۱=۳$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۳۷ **گام اول:** حاصل حد $+\infty$ شده است، با توجه به ضابطهٔ f، مخرج یک عبارت درجه‌دوم است؛ پس $x=۳$ ریشهٔ مضاعف مخرج است و مخرج به فرم $m(x-۳)^۲$ می‌باشد. در نتیجه:

مخرج کسر: $a-f(x+b)=m(x-۳)^۲ \xrightarrow{f(x)=۴x-x^۲} a-(۴(x+b)-(x+b)^۲)=m(x-۳)^۲$

$$\Rightarrow a-۴x-۴b+(x+b)^۲=m(x^۲-۶x+۹)$$

$$\Rightarrow a-۴x-۴b+\underline{x^۲}+۲bx+b^۲=\underline{mx^۲}-۶mx+۹m \xrightarrow{\text{ضرایب } x^۲ \text{ برابر}} m=۱$$

گام دوم: $m=۱$ را در تساوی به‌دست‌آمده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$m=۱ \rightarrow \underline{\underline{a}}-\underline{۴x}-\underline{\underline{۴b}}+x^۲+\underline{۲bx}+\underline{\underline{b^۲}}=x^۲\underline{-۶x}+\underline{\underline{۹}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۴+۲b=-۶ \Rightarrow b=-۱ \\ a-۴b+b^۲=۹ \xrightarrow{b=-۱} a+۴+۱=۹ \Rightarrow a=۴ \end{cases}$$

پس حاصل $a+b$ برابر می‌شود **با** $۴+(-۱)=۳$.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۳۸ **گام اول:** ابتدا حد چپ و راست تابع را در $x=۴$ به دست می‌آوریم و مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$y=۲[\sqrt{x}]+a[\log_۲ x]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \rightarrow ۴^+ : ۲[\sqrt{۴^+}]+a[\log_۲(۴^+)]=۲[۲^+]+a[۲^+]=۴+۲a \\ a \rightarrow ۴^- : ۲[\sqrt{۴^-}]+a[\log_۲(۴^-)]=۲[۲^-]+a[۲^-]=۲+a \end{cases}$$

پس:

$$۴+۲a=۲+a \Rightarrow a=-۲$$

گام دوم: به ازای $x=۲,۸,۳۲$ داخل براکت $\log_۲ x$ صحیح می‌شود و داخل براکت $[\sqrt{x}]$ غیرصحیح، پس تابع $y=-۲[\log_۲ x]$ ناپیوسته و تابع $y=۲[\sqrt{x}]$ پیوسته است و می‌دانیم که جمع یک تابع پیوسته و یک تابع ناپیوسته، ناپیوسته است. پس گزینهٔ (۱) درست است. نگاه کنید:

$$x=۱۶ : ۲[\sqrt{۱۶}]-۲[\log_۲ ۱۶]=۲[۴]-۲[۴]=۰$$

$$x=۱۶^+ : ۲[\sqrt{۱۶^+}]-۲[\log_۲ ۱۶^+]=۲[۴^+]-۲[۴^+]=۰$$

$$x=۱۶^- : ۲[\sqrt{۱۶^-}]-۲[\log_۲ ۱۶^-]=۲[۴^-]-۲[۴^-]=۰$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۳۹ **گام اول:** مخرج کسر به ازای $x=۲$ برابر صفر می‌شود و حاصل حد نیز برابر عدد حقیقی b شده است، پس صورت کسر نیز به ازای $x=۲$ باید صفر شود:

$$x=۲ \Rightarrow \sqrt[۳]{۲a}-۲=۰ \Rightarrow \sqrt[۳]{۲a}=۲ \xrightarrow{\text{توان ۳}} ۲a=۸ \Rightarrow a=۴$$ در صورت

گام دوم: حال $a=۴$ را در عبارت قرار می‌دهیم و به کمک اتحاد چاق و لاغر حد را رفع ابهام می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{\sqrt[۳]{۴x}-x}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\left(\frac{\sqrt[۳]{۴x}-x}{x-۲}\times\frac{(\sqrt[۳]{۴x})^{۲}+x\sqrt[۳]{۴x}+x^{۲}}{(\sqrt[۳]{۴x})^{۲}+x\sqrt[۳]{۴x}+x^{۲}}\right)=\lim_{x\to ۲}\frac{۴x-x^{۳}}{(x-۲)(۴+۴+۴)}=\lim_{x\to ۲}\frac{x(۴-x^{۲})}{۱۲(x-۲)}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{x\,\overset{-۱}{(۲-x)}\,(۲+x)}{۱۲\,(x-۲)}=\frac{-(۲)(۴)}{۱۲}=\frac{-۲}{۳}$$

پس $b=-\frac{۲}{۳}$.

گام سوم: حال خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم:

$$[a+b]=[۴-\frac{۲}{۳}]=[۳\frac{۱}{۳}]=۳$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۰ **گام اول:** ابتدا ضابطهٔ $f^{-۱}$ را به کمک نکته بالا به دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{ax+b}{۴x+۹} \Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{-۹x+b}{۴x-a}$$

گام دوم: حال حاصل $\lim_{x\to\infty}\frac{f^{-۱}(x)}{x}$ ، $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{f^{-۱}(x)}$ را با توجه به قاعدهٔ پرتوان به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^{-۱}(x)}{f(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-۹x+b}{۴x-a}}{\frac{ax+b}{۴x+۹}}\xrightarrow{\text{پرتوان}}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-۹\,x}{۴x}}{\frac{a\,x}{۴x}}=\frac{-۹}{a}$$

پس $\lim\frac{f(x)}{f^{-۱}(x)}$ نیز معکوس $\frac{-۹}{a}$ یعنی $\frac{-a}{۹}$ می‌باشد.

گام سوم: حاصل طبق تساوی داده‌شده در صورت سؤال، خواستهٔ سؤال را به دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^{-۱}(x)}{f(x)}=\lim\frac{f(x)}{f^{-۱}(x)} \Rightarrow \frac{-۹}{a}=\frac{-a}{۹} \Rightarrow -a^{۲}=-۸۱ \Rightarrow a^{۲}=۸۱ \Rightarrow a=\pm ۹$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۱ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** حد چپ تابع f در $x=-1$، عددی غیر صفر است. با توجه به این‌که به ازای $x=-1$، چندجمله‌ای x^2+3x+2 برابر صفر می‌شود؛ پس لزوماً مخرج کسر تابع f نیز به ازای $x=-1$، برابر صفر است.

به ازای $x\to(-1)$، داریم:

$$|x-1|=-(x-1)$$

بنابراین مقدار a برابر است با: مخرج کسر : $ax-(x-1)=(a-1)x+1 \xrightarrow{x=-1} -(a-1)+1=0$

$$\Rightarrow -a+2=0 \Rightarrow a=2$$

گام دوم: حد چپ تابع f را در $x=-1$ محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+3x+2}{2x-(x-1)}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{(x+1)(x+2)}{x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}(x+2)=-1+2=1 \Rightarrow b=1$$

گام سوم: حد راست تابع f را در $x=1$ محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+3x+2}{2x+(x-1)}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+3x+2}{3x-1}=\frac{1+3+2}{3-1}=\frac{6}{2}=3\Rightarrow c=3$$

گام چهارم: با توجه به مقادیر به‌دست‌آمده، حاصل $a+b+c$ را محاسبه می‌کنیم:

$$a+b+c=2+1+3=6$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۲ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** با توجه به اتحاد مثلثاتی $\sin^2x=1-\cos^2x$، کل عبارت را برحسب کسینوس می‌نویسیم.

$$\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos^3x}{\sin^2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos^3x}{1-\cos^2x}$$

گام دوم: برای تجزیهٔ عبارت صورت کسر از اتحاد چاق و لاغر و برای تجزیهٔ عبارت مخرج کسر از اتحاد مزدوج کمک می‌گیریم و سپس عامل مشترک را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم:

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x+\cos^2x}{1-\cos x}$$

گام سوم: به جای x، مقدار π را قرار می‌دهیم و حد تابع را به دست می‌آوریم:

$$=\frac{1-(-1)+(-1)^2}{1-(-1)}=\frac{3}{2}=1/5$$

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۳ **پاسخ تشریحی** **گام اول:** حد راست تابع f در $x=0$ را تعیین می‌کنیم. دقت کنید که اگر $x>0$، آن‌گاه $|x|=x$.

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{|x|}[-x]=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}[0^-]=1\times(-1)=-1$$

گام دوم: حد چپ تابع f در $x=0$ را تعیین می‌کنیم. دقت کنید که اگر $x<0$، آن‌گاه $|x|=-x$.

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{|x|}[-x]=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{-x}[0^+]=(-1)\times0=0$$

گام سوم: هیچ‌کدام از مقادیر حد راست و حد چپ تابع f در $x=0$، با $f(0)=1$ برابر نیست، پس تابع از راست و چپ در $x=0$ ناپیوسته است.

(خیلی سبز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۴۴ رابطهٔ تقسیم را برای تقسیم $(x+۲)p(x)$ بر $x^۳-x$ می‌نویسیم:

$$(x+۲)p(x)=x(x-۱)(x+۱)q_۱(x)+۳x+۱$$

مقادیر $x=۰$ ، $x=۱$ و $x=-۱$ را در رابطه بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$۲p(۰)=۱\Rightarrow p(۰)=\frac{۱}{۲}$$

$$۳p(۱)=۴\Rightarrow p(۱)=\frac{۴}{۳}\quad p(-۱)=-۲$$

حال رابطهٔ تقسیم دوم را می‌نویسیم:

$$p(x)-xp(۱-x)=x(x-۱)q_۲(x)+\alpha x+\beta$$

در اینجا باقی‌مانده را درجه یک و به صورت $\alpha x+\beta$ در نظر گرفته‌ایم. حال مقادیر $x=۰$ و $x=۱$ را در رابطه بالا جای‌گذاری می‌کنیم:

$$x=۰: p(۰)=\beta\Rightarrow\beta=\frac{۱}{۲}$$

$$x=۱: p(۱)-p(۰)=\alpha+\beta\Rightarrow\frac{۴}{۳}-\frac{۱}{۲}=\alpha+\frac{۱}{۲}\Rightarrow\alpha=\frac{۱}{۳}$$

پس باقی ماندهٔ تقسیم به‌صورت $\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۲}$ است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۵ در یک همسایگی چپ $x=-۱$ ، $[x]=-۲$ است و داریم:

$$\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{a[x]-a^۲x}{۳x^۲+x-۲}=\lim_{x\to(-۱)^-}\frac{a^۲-۲a}{(x+۱)(۳x-۲)}=\frac{a^۲-۲a}{۰^+}=-\infty$$

برای آنکه تساوی بالا برقرار باشد، لازم است $a^۲-۲a$ منفی باشد.

$$\Rightarrow a^۲-۲a=a(a-۲)<۰\Rightarrow ۰<a<۲\ (۱)$$

در یک همسایگی راست $x=-۱$ ، $[x]=-۱$ است و داریم:

$$\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{a[x]-a^۲x}{۳x^۲+x-۲}=\lim_{x\to(-۱)^+}\frac{a^۲-a}{(x+۱)(۳x-۲)}=\frac{a^۲-a}{۰^-}=-\infty$$

برای آنکه تساوی بالا برقرار باشد، لازم است $a^۲-a$ مثبت باشد.

$$\Rightarrow a^۲-a=a(a-۱)>۰\Rightarrow a<۰\text{ یا }a>۱\qquad(۲)$$

از اشتراک دو مجموعهٔ (۱) و (۲) بازهٔ قابل قبول برای a، $(۱,۲)$ به دست می‌آید.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۶

$$\lim_{x\to۰}\frac{۱+\sin x-\sqrt{\cos x}}{\cos x-\sqrt{۱+\sin x}}\times\frac{۱+\sin x+\sqrt{\cos x}}{\underbrace{۱+\sin x+\sqrt{\cos x}}_{۲}}\times\frac{\overbrace{\cos x+\sqrt{۱+\sin x}}^{۲}}{\cos x+\sqrt{۱+\sin x}}=\lim_{x\to۰}\frac{(۱+\sin x)^۲-\cos x}{\cos^۲x-(۱+\sin x)}=\lim_{x\to۰}\frac{۱+\sin^۲x+۲\sin x-\cos x}{(۱-\sin^۲x)-(۱+\sin x)}$$

$$=\lim_{x\to۰}\frac{-\cos^۲x-\cos x+۲+۲\sin x}{-\sin^۲x-\sin x}=\lim_{x\to۰}\frac{\cos^۲x+\cos x-۲}{\sin^۲x+\sin x}-\lim\frac{۲\sin x}{\sin^۲x+\sin x}=\lim_{x\to۰}\frac{(\cos x+۲)(\cos x-۱)}{\sin x(\sin x+۱)}-\lim_{x\to۰}\frac{۲\sin x}{\sin x(\sin x+۱)}$$

$$=۳\lim_{x\to۰}\frac{\cos x-۱}{\sin x}-۲=۳\lim_{x\to۰}\frac{-۲\sin^۲\frac{x}{۲}}{۲\sin\frac{x}{۲}\cos\frac{x}{۲}}-۲=-۳\lim_{x\to۰}\tan\frac{x}{۲}-۲=۰-۲=-۲$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۷ حدود چپ و راست در $x=۱$ هر دو برابر $-\infty$ است، پس $x=۱$ باید ریشه مضاعف مخرج باشد، ریشه دیگر مخرج را c در نظر می‌گیریم و داریم:

$$x^۳+ax+b=(x-۱)^۲(x-c)=(x^۲-۲x+۱)(x-c)\Rightarrow x^۳+ax+b=x^۳-(c+۲)x^۲+(۲c+۱)x-c$$

$$\Rightarrow c+۲=۰\Rightarrow c=-۲\Rightarrow\begin{cases}a=۲c+۱=-۳\\b=-c=۲\end{cases}\Rightarrow ۳a+b=-۷$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۸ $x=a$ ریشهٔ مشترک دو تابع است:

$$x^۲+mx+۱=-(-x^۲+x+m)\Rightarrow x^۲+mx+۱=x^۲-x-m\Rightarrow mx+x=-m-۱\Rightarrow x(m+۱)=-m-۱\Rightarrow x=-۱\Rightarrow a=-۱$$

به ازاء $x=-۱$ مقدار $x^۲+mx+۱$ یا $-x^۲+x+m$ برابر صفر است:

$$(-۱)^۲+m(-۱)+۱=۰\Rightarrow m=۲$$

حال به محاسبهٔ مقدار حد خواسته شده می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to-۱}\frac{x^۲+۲x+۱}{-x^۲+x+۲}=\frac{۰}{۰}\Rightarrow \lim_{x\to-۱}\frac{(x+۱)^{\cancel{۲}}}{-\cancel{(x+۱)}(x-۲)}=\lim_{x\to-۱}\frac{x+۱}{-(x-۲)}=۰$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۴۹ در $x=۲k$ پیوستگی تابع را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to۲k^+}f(x)=\lim_{x\to۲k^+}|x+[-x]|=|۲k-۲k-۱|=۱$$
$$f(۲k)=|۲k+[-۲k]|=|۲k-۲k|=۰$$
$$\lim_{x\to۲k^-}f(x)=\lim_{x\to۲k^-}[x]-x=(۲k-۱)-۲k=-۱$$

تابع در $x=۲k$ از هر دو طرف ناپیوسته است.

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵۰ با توجه به مبهم بودن جواب حد، پرانتز اول را در مزدوج عبارت ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x+a})(\sqrt{x}+\sqrt{x+a})}{\sqrt{x}+\sqrt{x+a}}\right)(\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۲})=a-۲=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-(x+a)}{\underset{\text{پرتوان}}{\sqrt{x}}+\underset{\text{پرتوان}}{\sqrt{x+a}}}(\underset{\text{پرتوان}}{\sqrt{x-۱}}+\underset{\text{پرتوان}}{\sqrt{x+۲}})=a-۲$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-a)(\sqrt{x}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+\sqrt{x})}=a-۲\Rightarrow -a=a-۲\Rightarrow -۲a=-۲\Rightarrow a=۱$$

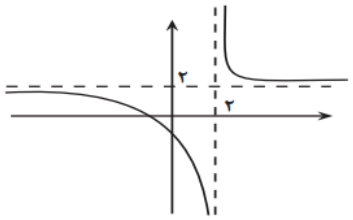
(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵۱ چون $\lim_{x\to۲^-}f(x)=\frac{۵}{۰^-}=-\infty$ است. در نتیجه:

$$\lim_{x\to۲^-}[f(f(x))]=\lim_{x\to(-\infty)}[f(x)]$$

تابع $f(x)=\frac{۲x+۱}{x-۲}$، یک تابع هموگرافیک نزولی است.

تابع در بازهٔ $(-\infty,۲)$، نزولی است.



با توجه به اینکه در $x\to-\infty$ با مقادیر کم تر از ۲ به ۲ وصل می‌کنیم حاصل حد ۱ است. $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=۱$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵۲ (۱): تابع دارای جزء صحیح، زمانی پیوسته می‌شود که ضریبش صفر باشد:

$$b=۰\ ,\ m=۰$$

(۲): زمانی یک تابع چند ضابطه‌ای پیوسته می‌شود که ضابطه بالا و پایین آن در نقطه مرزی برابر باشند:

$$-۴a=-۳a+۲\Rightarrow a=-۲$$

$$f(x)=\begin{cases}۸ & x\geq ۳\\ ۸ & x<۳\end{cases}\Rightarrow\frac{f(b^۲-m)}{a}=\frac{f(۰)}{-۲}=\frac{۸}{-۲}=-۴$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵۳ نکته: شرط بخش‌پذیری چندجمله‌ای f بر $(x-a)^۲$ آن است که $f(a)=f'(a)=۰$ باشد برای آن که f در $x=۱$ حد راست داشته باشد آن است که $x^۳+ax+b$ بر $(x-۱)^۲$ بخش‌پذیر باشد.

$$\begin{cases} g(x)=x^۳+ax+b \\ g'(x)=۳x^۲+a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g(۱)=۱+a+b=۰ \to b=۲ \\ g'(۱)=۳+a=۰ \to a=-۳ \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^۳+ax+b=x^۳-۳x+۲=(x-۱)^۲(x+۲) \Rightarrow f(x)=\begin{cases} x[-x]+c & x\le ۱ \\ x+۲ & x>۱ \end{cases}$$

حال شرط پیوستگی f در $x=۱$ را بررسی می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=f(۱) \Rightarrow ۳=-۱+c \Rightarrow c=۴$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۴ ابتدا f' را محاسبه می‌کنیم:

$$f'(x)=\sqrt{x^۲+x}+\frac{۲x+۱}{۲\sqrt{x^۲+x}}\times x=\frac{۲x^۲+۲x+۲x^۲+x}{۲\sqrt{x^۲+x}}=\frac{۴x^۲+۳x}{۲\sqrt{x^۲+x}}$$

حال حاصل حد را پیدا می‌کنیم:

$$\lim_{x\to+\infty}(۲x-f'(x))=\lim_{x\to+\infty}\left(۲x-\frac{۴x^۲+۳x}{۲\sqrt{x^۲+x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(۲x-\frac{۴x^۲}{۲\sqrt{x^۲+x}}-\frac{۳x}{\underbrace{۲\sqrt{x^۲+x}}_{\frac{۳}{۲}}}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x\sqrt{x^۲+x}-۲x^۲}{\sqrt{x^۲+x}}-\frac{۳}{۲} \to \frac{۲x(\sqrt{x^۲+x}-x)}{\sqrt{x^۲+x}}\times\frac{(\sqrt{x^۲+x}+x)}{(\sqrt{x^۲+x}+x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x(x^۲+x-x^۲)}{\sqrt{x^۲+x}\left(\sqrt{x^۲+x}+x\right)}-\frac{۳}{۲}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۲}{x(x+x)}-\frac{۳}{۲}=۱-\frac{۳}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵۵ حد چپ و راست تابع را در هر دو نقطه $x=۱$ و $x=۲$ بررسی می‌کنیم.

۱) $\lim_{x\to ۱^+} f(x)=۲\log ۰^+=-\infty$

۲) $\lim_{x\to ۱^-} f(x)=۳\log ۰^+=-\infty$

۳) $\lim_{x\to ۲^+} f(x)=-\log(+\infty)=-\infty$

۴) $\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\log(+\infty)=+\infty$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵۶ فرض کنید $f(x)=ax+b$ برای این که حالت مبهم $\frac{0}{0}$ به وجود آید باید $f(1)=a+b=-1$ باشد. حال از قاعده هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\frac{f'(x)}{3\sqrt[3]{f^2(x)}}}{2(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{3\sqrt[3]{f^2(x)}+a}{6(x-1)\underbrace{\sqrt[3]{f^2(1)}}_{1}}$$

حال برای آن که مجدداً به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ برسیم باید $a=-3$ باشد. یک بار دیگر از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 1}\frac{3\times\frac{2f'(x)}{3\sqrt[3]{f(x)}}}{6}=\frac{f'(1)}{3\sqrt[3]{f(1)}}=\frac{a}{-3}=1$$

(دیاز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۵۷

$$\lim_{x\to 2^+} y=y(2)=\frac{4+2a+2b}{2-3}=-4-2a-2b$$

$$\lim_{x\to 2^-} y=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+ax+b}{x-(2x-2)}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+ax+b}{2-x}$$

به شرطی حد وجود دارد که $4+2a+b=0$ باشد. حال از هوپیتال استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2^-} y \overset{H}{=} \lim_{x\to 2^+}\frac{2x+a}{-1}=-4-a$$

$$-4-a=-4-2a-2b\Rightarrow a=-2b$$

حد چپ و راست را برابر هم قرار می‌دهیم.

$$\begin{cases}\Rightarrow a=-2b\\ 4+2a+b=0\Rightarrow 4-4b+b=0\Rightarrow b=\frac{4}{3}\end{cases}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵۸ ابتدا $t=\frac{1}{x}$ را در نظر می‌گیریم:

$$\lim_{x\to-\infty} xf\left(\frac{3}{x}-2\right)=\lim_{t\to 0^-}\frac{f(3t-2)}{t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{\left|(3t-2)^2-4\right|}{t\underbrace{\sqrt{1-(3t-2)^3}}_{3}}$$

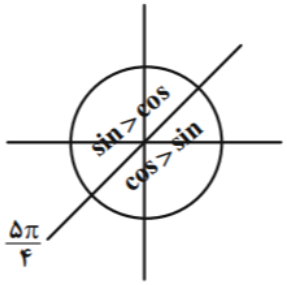
$$=\lim_{t\to 0^-}\frac{\left|9t^2-12t\right|}{3t}=\lim_{t\to 0^-}\frac{-(9t-12)}{3}=-4$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۵۹ در مقادیر نزدیک $\frac{5\pi}{4}$ و سمت راست آن، مقدار $\cos x$ از $\sin x$ بیشتر است.

$$\sqrt{1-2\sin x\cos x}=\sqrt{(\sin x-\cos x)^2}=|\sin x-\cos x|=\cos x-\sin x$$

$$\lim_{x\to\frac{5\pi^+}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\tan x-\cot x}=\lim_{x\to\frac{5\pi^+}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}}=\lim_{x\to\frac{5\pi^+}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\frac{\sin^2 x-\cos^2 x}{\cos x.\sin x}}$$



$$=\lim_{x\to\frac{5\pi^+}{4}}\frac{(\cos x-\sin x)\cos x.\sin x}{(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)}=\lim_{x\to\frac{5\pi^+}{4}}\frac{-\sin x.\cos x}{\sin x+\cos x}=\frac{-(-\frac{\sqrt{2}}{2})(-\frac{\sqrt{2}}{2})}{2(-\frac{\sqrt{2}}{2})}=\frac{-\frac{1}{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

(قلمچی ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۰

$$\begin{cases}f(x)=a(x+1)(x-2)\\ f(0)=2\end{cases}\Rightarrow a(1)(-2)=2\Rightarrow a=-1$$

$$g(x)=-2x+2\Rightarrow g^{-1}(x)=-\frac{1}{2}x+1$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to2}\frac{g^{-1}(x)}{f(x)}=\lim_{x\to2}\frac{-\frac{1}{2}x+1}{-(x+1)(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{\frac{2-x}{2}}{(x+1)(2-x)}=\frac{1}{6}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۱ چون f فقط در $x=2$ ناپیوسته است، پس:

$$f(x)=\frac{(x+4)(x-2)}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{x+4}{x-2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+4}{x-1}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{2x+4}{x-1}=x\Rightarrow x^2-3x-4=0$$

$$P=-4$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۲

$$\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{x^2+f(x)}=\frac{-1}{\square}=-\infty$$

مخرج کسر $=0=x^2+f(x)=(x+3)^2\Rightarrow f(x)=6x+9\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\frac{(fof)(x)}{\sqrt{9x^2-6x+3}}\simeq\frac{36x}{-3x}=-12$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۳ صورت کسر برابر صفر است در حالی‌که حاصل حد نمی‌تواند صفر باشد پس باید مخرج کسر هم صفر باشد یعنی $b=-1$ است.

$$\lim_{x\to 1}\frac{a(\sqrt[3]{2-\sqrt{x}}-1)}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{a(2-\sqrt{x}-1)}{(x^2-1)\underbrace{(\sqrt[3]{(2-\sqrt{x})^2}+\sqrt[3]{2-\sqrt{x}}+1)}_{3}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{a(1-\sqrt{x})}{6(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{a(\overset{-1}{1-\sqrt{x}})}{6(\sqrt{x}-1)\underbrace{(\sqrt{x}+1)}_{2}}=\frac{-a}{12}$$

$$\Rightarrow\frac{-a}{12}=\frac{1}{ab}=\frac{-1}{a}$$

$$\Rightarrow a^2=12\Rightarrow a=\pm 2\sqrt{3}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۴

$$f(x)=\frac{1}{2}x-m\Rightarrow f^{-1}(x)=2x+2m$$

$$g(x)=-\frac{1}{m}x+2\Rightarrow g^{-1}(x)=-mx+2m$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{fog^{-1}(x)}{(f^{-1}+g)(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2}(-mx)}{2x-\frac{1}{m}x}=\frac{\frac{-m}{2}}{2-\frac{1}{m}}=\frac{-m^2}{4m-2}$$

$$\Rightarrow\frac{-m^2}{4m-2}=-\frac{9}{16}\Rightarrow 8m^2=18m-9$$

$$\Rightarrow 8m^2-18m+9=0\Rightarrow m=\frac{3}{2}\ \text{یا}\ \frac{3}{4}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۵ برای آنکه f در $x=1$ حد چپ داشته باشد باید صورت کسر ضابطهٔ اول، عامل $x-1$ داشته باشد

$$ax^2+bx+4=4(x-1)^2\Rightarrow\begin{cases}b=-8\\a=4\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2|x-1|}{x-1}=-2$$

$$f(1)=-b+c=8+c=-2\Rightarrow c=-10$$

$$[\frac{ac}{3}]=[\frac{-40}{3}]=-14$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۶

$$f(x)-f(x-2)=\frac{x-1}{x(x-2)}-\frac{x-3}{(x-2)(x-4)}=\frac{(x-1)(x-4)-(x-3)x}{x(x-2)(x-4)}$$

$$=\frac{-2x+4}{x(x-2)(x-4)}$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 2}(f(x)-f(x-2))=\lim_{x\to 2}\frac{-2}{x(x-4)}=\frac{1}{2}$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۷ در ابتدا مقدار براکت و سپس علامت قدرمطلق را مشخص می‌کنیم:

$$\lim_{x\to(-2)^+}\frac{-(x^3+4)-4}{x+2}=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{-(x^3+8)}{x+2}$$

$$=\lim_{x\to(-2)^+}\frac{-(x^2-2x+4)}{1}=-12$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۸ پر توان صورت $\sqrt{۱۶x^۲}$ یا همان $|۴x|$ و در مخرج هم به جای $\sqrt{۴x^۲-x+۱}$ مقدار $|۲x|$ را می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(۲x)}{x+f(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{۱۶x^۲-۲x+۱}}{x+\sqrt{۴x^۲-x+۱}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{|۴x|}{x+|۲x|}=\frac{-۴x}{x-۲x}=۴$$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۶۹ اگر $۰\le x<\alpha$ آنگاه $۳\le ۳\sqrt{۱+۲x}<۳\sqrt{۱+۲\alpha}$ پس حداکثر مقدار $۳\sqrt{۱+۲\alpha}$ برابر ۴ است در نتیجه $۳\sqrt{۱+۲\alpha}=۴$ و یا $\alpha=\frac{۷}{۱۸}$

(دیاز ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۷۰ **نکته: خط مماس در نقطهٔ تماس با دایره، بر شعاع آن دایره عمود است.**

نکته: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر است با:

$$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

نکته: رابطهٔ $(x-\alpha)^۲+(y-\beta)^۲=r^۲$ معادلهٔ دایره‌ای به مرکز $O(\alpha,\beta)$ و شعاع r در صفحهٔ مختصات است که به آن «معادلهٔ استاندارد دایره» می‌گوییم.

محل برخورد دو قطر داده شده همان مرکز دایره است، بنابراین داریم:

$$\begin{cases}۲x-y=۳\\ ۳x+y=۷\end{cases}\xrightarrow{+}۵x=۱۰\Rightarrow x=۲\Rightarrow y=۱\Rightarrow O(۲,۱)$$

خط $۳x-۴y+۸=۰$ بر دایره به مرکز $O(۲,۱)$ مماس است. پس فاصلهٔ O تا این خط همان طول شعاع دایره است:

$$r=\frac{|۳(۲)-۴(۱)+۸|}{\sqrt{۹+۱۶}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

اکنون با داشتن شعاع و مرکز، معادلهٔ دایره را می‌نویسیم:

$$(x-۲)^۲+(y-۱)^۲=۲^۲\Rightarrow x^۲-۴x+۴+y^۲-۲y+۱=۴\Rightarrow x^۲+y^۲-۴x-۲y+۱=۰$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۱ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-۲$ برابر -۲ است؛ بنابراین:

$$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \Rightarrow P(۲)=-۲ \quad (۱)$$

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x+۱$ برابر ۲ است؛ بنابراین:

$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱ \Rightarrow P(-۱)=۲ \quad (۲)$$

با فرض $f(x)=۲P(x^۲-۱۰)-PoP(x+۲)$، می‌خواهیم باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ را بر $x+۳$ به‌دست آوریم. اگر این باقی‌مانده برابر r باشد، داریم:

$$x+۳=۰ \Rightarrow x=-۳ \Rightarrow f(-۳)=r$$

حال داریم:

$$f(-۳)=۲P(۹-۱۰)-PoP(-۱) \Rightarrow f(-۳)=۲P(-۱)-P(P(-۱)) \xrightarrow{(۲),(۱)} r=۲(۲)-P(۲)=۴-(-۲)=۶$$

پس باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای داده‌شده بر $x+۳$، برابر ۶ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۲ باید حد راست و حد چپ تابع در $x=۳$، برابر $-\infty$ شود.

وقتی $x \to ۳^+$ میل می‌کند، مخرج کسر با مقادیر مثبت به‌سمت صفر میل می‌کند، پس حد صورت کسر باید منفی باشد. پس:

$$\lim_{x \to ۳^+} (۴۲-k[x])<۰ \Rightarrow ۴۲-۳k<۰ \Rightarrow ۳k>۴۲ \Rightarrow k>۱۴ \quad (۱)$$

همچنین وقتی $x \to ۳^-$ میل می‌کند، مخرج کسر با مقادیر منفی به‌سمت صفر میل می‌کند، پس برای آن‌که حاصل حد $-\infty$ شود، باید حد صورت کسر مثبت باشد، پس:

$$\lim_{x \to ۳^-} (۴۲-k[x])>۰ \Rightarrow ۴۲-۲k>۰ \Rightarrow ۲k<۴۲ \Rightarrow k<۲۱ \quad (۲)$$

بنا به شرط‌های (۱) و (۲)، باید $۱۴<k<۲۱$ باشد؛ بنابراین k می‌تواند ۶ عدد صحیح ۱۵، ۱۶، ...، ۲۰ باشد.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۳ فرض می‌کنیم شیب تابع خطی f برابر m باشد $(m<0)$، پس داریم:

$$y=mx+h \xrightarrow{(2,0)\in f} 0=2m+h \Rightarrow h=-2m \Rightarrow f(x)=mx-2m$$

تابع خطی g بر تابع خطی f عمود است؛ پس شیب آن، قرینه و معکوس شیب f است؛ یعنی شیب تابع g برابر $-\frac{1}{m}$ است و معادلهٔ آن به‌صورت $g(x)=-\frac{1}{m}x$ است. اکنون داریم:

$$f(x)=mx-2m \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+2m}{m}=\frac{1}{m}x+2$$

$$g(x)=-\frac{1}{m}x \Rightarrow g^{-1}(x)=-mx$$

حال داریم:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-g^{-1}(x)}{g(x)-f^{-1}(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{mx-2m+mx}{-\frac{1}{m}x-\frac{1}{m}x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2mx}{-\frac{2}{m}x}=-m^2$$

حاصل حد برابر -9 است؛ بنابراین:

$$-m^2=-9 \Rightarrow m^2=9 \Rightarrow m=\pm3 \xrightarrow{m<0} m=-3 \Rightarrow \begin{cases} f(x)=-3x+6 \\ g(x)=\frac{1}{3}x \end{cases}$$

$x=\alpha$ محل برخورد توابع f و g است، پس داریم:

$$-3\alpha+6=\frac{1}{3}\alpha \Rightarrow \frac{10}{3}\alpha=6 \Rightarrow \alpha=1/8$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۴ بنا بر فرض سؤال داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-5 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+5x}+ax}{x-1}=-5 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2}+ax}{x}=-5 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{|2x|+ax}{x}=-5$$

$$\xrightarrow{x<0} \lim_{x\to-\infty}\frac{(a-2)x}{x}=-5 \Rightarrow a-2=-5 \Rightarrow a=-3$$

بنابراین حاصل حد خواسته‌شده برابر است با:

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{\sqrt{4x^2+5x}-3x}{x-1}\times\frac{\sqrt{4x^2+5x}+3x}{\sqrt{4x^2+5x}+3x}=\lim_{x\to1^+}\frac{4x^2+5x-9x^2}{(x-1)(\sqrt{4x^2+5x}+3x)}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{-5x(x-1)}{(x-1)(\sqrt{4x^2+5x}+3x)}=\lim_{x\to1^+}\frac{-5x}{\sqrt{4x^2+5x}+3x}=\frac{-5}{\sqrt{9}+3}=\frac{-5}{6}$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۵ ابتدا ضابطهٔ تابعی را که باید از آن حد گرفته شود، با توجه به این‌که x عددی منفی است $(x \to -\infty)$ ساده می‌کنیم:

$$\frac{f^{۲}(x)}{f(x^{۲})} = \frac{(x+|۷x|+۱)^{۲}}{x^{۲}+|۷x^{۲}|+۱} = \frac{(x-۷x+۱)^{۲}}{x^{۲}+۷x^{۲}+۱} = \frac{(-۶x+۱)^{۲}}{۸x^{۲}+۱} = \frac{۳۶x^{۲}-۱۲x+۱}{۸x^{۲}+۱}$$

بنابراین حد این تابع وقتی $x \to -\infty$ برابر است با:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f^{۲}(x)}{f(x^{۲})} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۳۶x^{۲}-۱۲x+۱}{۸x^{۲}+۱} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۳۶x^{۲}}{۸x^{۲}} = \frac{۳۶}{۸} = \frac{۹}{۲} = ۴/۵$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۶ ابتدا با استفاده از قاعدهٔ پرتوان حاصل $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{۴x+۱}{\sqrt{x^{۲}+۹}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۴x}{\sqrt{x^{۲}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۴x}{|x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{۴x}{x} = ۴$$

حال داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} fof(x) = \lim_{x\to+\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to۴} f(x) = \frac{۱۷}{\sqrt{۲۵}} = \frac{۱۷}{۵}$$

به طریق مشابه داریم:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{۴x+۱}{\sqrt{x^{۲}+۹}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۴x}{|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{۴x}{-x} = -۴$$

$$\lim_{x\to-\infty} fof(x) = \lim_{x\to-\infty} f(f(x)) = \lim_{x\to-۴} f(x) = \frac{-۱۵}{\sqrt{۲۵}} = -\frac{۱۵}{۵}$$

بنابراین اختلاف دو مقدار به‌دست‌آمده، برابر $۶/۴ = \frac{۳۲}{۵}$ است.

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۷ فرض می‌کنیم شیب تابع خطی f برابر m باشد؛ بنابراین:

$$f(x) = mx + h \xrightarrow{(۰,۲)\in f} f(x) = mx + ۲$$

حال داریم:

$$fof(x) = f(mx+۲) = m(mx+۲)+۲ = m^{۲}x + ۲m + ۲$$

$$f^{-۱}(x) = \frac{x-۲}{m} = \frac{۱}{m}x - \frac{۲}{m} \Rightarrow f^{-۱}(۲x) = \frac{۲}{m}x - \frac{۲}{m}$$

اکنون با توجه به فرض مسئله و قاعدهٔ پرتوان داریم:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{fof(x)}{f^{-۱}(۲x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{m^{۲}x}{\frac{۲}{m}x} = \frac{m^{۳}}{۲} \Rightarrow \frac{m^{۳}}{۲} = ۴ \Rightarrow m^{۳} = ۸ \Rightarrow m = ۲$$

حال مقدار α را به‌دست می‌آوریم:

$$m = ۲ \Rightarrow f(x) = ۲x + ۲ \xrightarrow{f(\alpha)=۰} ۲\alpha + ۲ = ۰ \Rightarrow \alpha = -۱$$

(گزینه دو ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۸ یک بار حد راست و یک بار حد چپ را محاسبه می‌کنیم:

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 1^+}(f+g)(x)=0\\ \lim\limits_{x\to 1^+}(f-g)(x)=5\end{matrix}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1^+} f(x)=2/5$$

$$\left.\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 1^-}(f+g)(x)=2\\ \lim\limits_{x\to 1^-}(f-g)(x)=3\end{matrix}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} g(x)=-0/5$$

بنابراین حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)+\lim_{x\to 1^-} g(x)=2/5+(-0/5)=2$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۷۹ حد چپ و حد راست تابع را در نقطه $x=2$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^3-[x^3]}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x^3-8}=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x^3-[x^3]}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-4}{x^3-7}=\frac{0}{1}=0$$

بنابراین مجموع حد چپ و حد راست تابع $f(x)$ در نقطه $x=2$ برابر $\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$ است.

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۰ ضابطهٔ تابع f را ساده‌تر می‌کنیم:

$$f(x)=a[x]+b[x]+b-2a=(a+b)[x]+b-2a$$

تابع $f(x)$ زمانی در $\mathbb{R}$ پیوسته است که شامل جزء صحیح نباشد، بنابراین $a+b=0$ و شکل اصلی تابع به صورت $f(x)=b-2a$ است.

$$\frac{2b}{f(a)}=\frac{2b}{b-2a}\overset{a=-b}{=\!=}\frac{2b}{3b}=\frac{2}{3}$$

(ماراتون ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۱ توجه کنید که ۲ باید عضو بازهٔ $(2a-1,a+1)$ باشد، پس:

$$2a-1<2\Rightarrow a<\frac{3}{2}\Rightarrow 1<a<\frac{3}{2}\Rightarrow [a]=1$$
$$a+1>2\Rightarrow a>1$$

پس $(\frac{1}{2},1)$ یک همسایگی چپ $[a]$ است.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۲

$$x \to \frac{\pi}{۲}^- \Rightarrow \cos x \to ۰^+ \Rightarrow [\cos x] = ۰ , [-\cos x] = -۱$$

$$x \to \frac{\pi}{۲}^+ \Rightarrow \cos x \to ۰^- \Rightarrow [\cos x] = -۱ , [-\cos x] = ۰$$

بنابراین:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^-} f(x) = ۰ - ۱ = -۱$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} f(x) = -a + ۰ = -a$$

در نتیجه:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{۲}^+} f(x) \Rightarrow -۱ = -a \Rightarrow a = ۱$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۳ فرض کنید $\lim_{x \to ۲} f(x) = L_۱$ و $\lim_{x \to ۲} g(x) = L_۲$ ، در این صورت:

$$\lim_{x \to ۲} (f - ۲g)(x) = \lim_{x \to ۲} f(x) - ۲ \lim_{x \to ۲} g(x) = L_۱ - ۲L_۲ = ۴$$

$$\lim_{x \to ۱} (\frac{f}{g})(۲x) = \lim_{t \to ۲} (\frac{f}{g})(t) = \frac{\lim_{x \to ۲} f(t)}{\lim_{t \to ۲} g(t)} = \frac{L_۱}{L_۲} = ۳ \Rightarrow L_۱ = ۳L_۲$$

بنابراین:

$$۳L_۲ - ۲L_۲ = ۴ \Rightarrow L_۲ = ۴ \Rightarrow L_۱ = ۱۲$$

در نتیجه:

$$\lim_{x \to ۲} f(x) = ۱۲$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۴

$$\lim_{x \to ۲^+} f(x) = ۸ + m \times ۴ = ۴m + ۸$$

$$\lim_{x \to ۲^-} f(x) = ۷ + m \times ۱ = m + ۷$$

شرط آن‌که f در $x = ۲$ حد داشته باشد آن است که حد چپ و حد راست تابع در $x = ۲$ برابر باشند، پس:

$$۴m + ۸ = m + ۷ \Rightarrow m = -\frac{۱}{۳}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۵ حد مخرج کسر داده شده در $x = ۲$ برابر صفر است، پس حد صورت آن هم در این نقطه باید صفر باشد، در غیر این صورت حاصل حد کسر نامتناهی خواهد بود، پس:

$$\lim_{x \to ۲} (x^۲ + ax + b) = ۰ \Rightarrow ۴ + ۲a + b = ۰ \Rightarrow b = -۲a - ۴$$

بنابراین:

$$\lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ + ax + b}{x^۲ - ۴} = \lim_{x \to ۲} \frac{x^۲ + ax - ۲a - ۴}{x^۲ - ۴} = \lim_{x \to ۲} (\frac{x^۲ - ۴}{x^۲ - ۴} + \frac{a(x-۲)}{x^۲ - ۴}) = ۱ + \lim_{x \to ۲} \frac{a}{x+۲} = ۱ + \frac{a}{۴}$$

بنابراین:

$$۱ + \frac{a}{۴} = b \Rightarrow ۱ + \frac{a}{۴} = -۲a - ۴ \Rightarrow \frac{۹}{۴}a = -۵ \Rightarrow a = -\frac{۲۰}{۹} \Rightarrow b = \frac{۴}{۹} \Rightarrow \frac{a}{b} = -۵$$

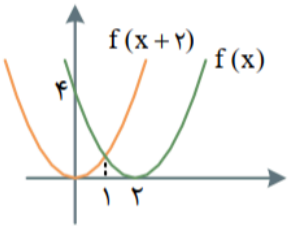
(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۶ اگر فرض کنیم $t = ۴^x$ ، آن‌گاه حد مورد نظر به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{x \to \frac{۱}{۲}} \frac{(۴^x)^۲ - ۴^x - ۲}{(۴^x)^۲ - ۳ \times ۴^x + ۲} = \lim_{t \to ۲} \frac{t^۲ - t - ۲}{t^۲ - ۳t + ۲} = \lim_{t \to ۲} \frac{(t+۱)(t-۲)}{(t-۱)(t-۲)} = \lim_{t \to ۲} \frac{t+۱}{t-۱} = ۳$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۷ با توجه به نمودار داده شده $f(x)=(x-۲)^۲$ پس:



$$\lim_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(x+۲)}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۲)^۲-x^۲}{x^۲-۱}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۴x+۴-x^۲}{x^۲-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{-۴(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}=-۲$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۸

$$y(x)=-۳x+۶\Rightarrow ۳x+f(۳x)=-۳x+۶$$

$$f(۳x)=-۶x+۶\Rightarrow f(x)=-۲x+۶$$

$$f^{-۱}(x)=\frac{-x+۶}{۲}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{۴x+f^{-۱}(x)}{۲x-۲f(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x+\frac{۶-x}{۲}}{۲x-۲(-۲x+۶)}=\lim_{x\to\infty}\frac{۳+\frac{۷}{۲}x}{۶x-۱۲}=\frac{۷}{۱۲}$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۸۹ توجه کنید که:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{ax^۲+x(-x+۲)}{۲x^۲-(x^۲-۱)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(a-۱)x^۲}{x^۲}=a-۱$$

بنابراین:

$$a-۱=۳\Rightarrow a=۴$$

در نتیجه:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^۲+x(x-۲)}{۲x^۲-(x^۲-۱)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+۱)x^۲}{x^۲}=a+۱=۵$$

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۰ توجه کنید که:

$$\lim_{x\to۲^-}f(x)=\lim_{x\to۲^-}(۲x^۲+۴)=۱۲$$

$$\lim_{x\to۲^+}f(x)=\lim_{x\to۲^+}(b\left[\frac{۴}{x}\right]+a[-x])=b-۳a$$

$$f(۲)=b\left[\frac{۴}{۲}\right]+a[-۲]=۲b-۲a$$

بنابراین:

$$۲b-۲a=b-۳a\Rightarrow b=-a$$

$$b-۳a=۱۲\Rightarrow -a-۳a=۱۲\Rightarrow a=-۳\Rightarrow b=۳$$

در نتیجه: $ab=-۹$.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۱ توجه کنید که دامنهٔ تابع f باید $\mathbb{R}$ باشد تا روی $\mathbb{R}$ پیوسته شود، پس عبارت زیر رادیکال باید روی $\mathbb{R}$ نامنفی باشد و عبارت مخرج f(x) نباید هیچ‌گاه صفر شود، بنابراین:

$$x^۲+ax+۴\geq ۰\Rightarrow \Delta\leq ۰\Rightarrow a^۲-۱۶\leq ۰\Rightarrow -۴\leq a\leq ۴$$

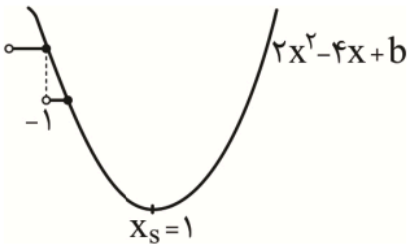
$$x^۲+۳x-a\neq ۰\Rightarrow \Delta<۰\Rightarrow ۹+۴a<۰\Rightarrow a<-\frac{۹}{۴}$$

بنابراین $-۴\leq a<-\frac{۹}{۴}$ و a می‌تواند اعداد -۴ یا -۳ باشد.

(ماز ۱۴۰۳-۱۴۰۴ - متوسط)

۲۹۲ گزینه ۱ درست است.

در $x=۱$ حد درون براکت برابر $۲+a+b$ می‌شود، که عددی صحیح است، اما با توجه به‌صورت سؤال براکت حد دارد، پس حتماً $x=۱$ طول رأس سهمی است و داریم:



$$x_s=\frac{-a}{۲(۲)}=۱\Rightarrow a=-۴$$

حالا چون سهمی در همسایگی -۱ نزولی است داریم:

$$\lim_{x\to(-۱)^+} f(x)=f(-۱)-۱=۴$$

$$\Rightarrow f(-۱)=۲+۴+b=۵\to b=-۱$$

پس داریم:

$$f(x)=[۲x^۲-۴x-۱]$$

و بنابراین: $\xrightarrow{\text{در همسایگی } ۴}\lim_{x\to۴^-} f(x)=f(۴)-۱=۱۴$ در همسایگی ۴ صعودی است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۳ گزینه ۴ درست است.

با توجه به آنکه حاصل حد، متناهی است و مخرج کسر به‌ازای $x=۲$ صفر می‌شود، پس باید صورت کسر به‌ازای $x=۲$ صفر شود:

$$۳-\sqrt{۲a+۱}=۰\Rightarrow\sqrt{۲a+۱}=۳\Rightarrow a=۴$$

حال حد داده‌شده را به‌ازای $a=۴$ محاسبه می‌کنیم:

$$L=\lim_{x\to۲}\frac{x+۱-\sqrt{۴x+۱}}{\sqrt[۳]{۳x+۲}-x}=\lim_{x\to۲}\frac{x+۱-\sqrt{۴x+۱}}{\sqrt[۳]{۳x+۲}-x}\times\frac{x+۱+\sqrt{۴x+۱}}{x+۱+\sqrt{۴x+۱}}\times\frac{\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}+x\sqrt[۳]{۳x+۲}+x^۲}{\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}+x\sqrt[۳]{۳x+۲}+x^۲}$$

$$=\lim_{x\to۲}\frac{(x+۱)^۲-(۴x+۱)}{۳x+۲-x^۳}\times\frac{\sqrt[۳]{(۳x+۲)^۲}+x\sqrt[۳]{۳x+۲}+x^۲}{x+۱+\sqrt{۴x+۱}}=\lim_{x\to۲}\frac{x^۲-۲x}{-x^۳+۳x+۲}\times\frac{۱۲}{۶}$$

$$=\lim_{x\to۲}\frac{۲x(x-۲)}{-(x-۲)(x^۲+۲x+۱)}=\lim_{x\to۲}\frac{۲x}{-(x^۲+۲x+۱)}=\frac{-۴}{۹}$$

بنابراین:

$$a+۹L=۴+۹\times\frac{-۴}{۹}=۴+(-۴)=۰$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۴ **گزینه ۴ درست است.**

$$f(x)=\begin{cases} ax^{۲}+bx & ,|x-۳|\geq ۱ \\ ۱+ax+\dfrac{b}{x} & ,|x-۳|<۱ \end{cases}$$

از شرط‌های دامنه، نقاط مرزی $x=۲,۴$ هستند؛ زیرا:

$$|x-۳|<۱\Rightarrow -۱<x-۳<۱\Rightarrow ۲<x<۴$$
$$|x-۳|\geq ۱\Rightarrow x-۳\geq ۱ \quad \text{یا} \quad x-۳\leq ۱\Rightarrow x\geq ۴ \quad \text{یا} \quad x\leq ۲$$

پس شرط پیوستگی (تساوی حد و مقدار) در $x=۲$ و $x=۴$ را می‌نویسیم:

$$x=۲: ۴a+۲b=۱+۲a+\frac{b}{۲}\Rightarrow ۲a+\frac{۳b}{۲}=۱$$

$$x=۴: ۱۶a+۴b=۱+۴a+\frac{b}{۴}\Rightarrow ۱۲a+\frac{۱۵}{۴}b=۱$$

$$\xrightarrow{\times ۶}\begin{cases} ۱۲a+۹b=۶ \\ ۱۲a+\dfrac{۱۵}{۴}b=۱ \end{cases}\xrightarrow{-} \frac{۲۱}{۴}b=۵\Rightarrow b=\frac{۲۰}{۲۱}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری}} a=\frac{-۳}{۱۴}$$

پس داریم:

$$\left[\frac{b}{a}\right]=\left[\frac{\frac{۲۰}{۲۱}}{\frac{-۳}{۱۴}}\right]=\left[-\frac{۲۰\times ۱۴}{۳\times ۲۱}\right]=\left[-\frac{۲۰\times ۲}{۳\times ۳}\right]=\left[-\frac{۴۰}{۹}\right]=-۵$$

$\downarrow$

بین ۴- و ۵-

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۵ برای اینکه تابع $f(x)$ بتواند در $x=۱$ حد داشته باشد باید:

$$f(x)=\frac{\sqrt{ax^{۲}+bx+c}}{|x^{۲}-۱|}=\frac{\sqrt{a(x-۱)^{۲}}}{|x-۱||x+۱|}=\frac{\sqrt{a}\,|x-۱|}{|x-۱||x+۱|}$$

اکنون حد تابع را در $x=۱$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{a}\,\cancel{|x-۱|}}{\cancel{|x-۱|}\,|x+۱|}=\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{a}}{|x+۱|}=\frac{\sqrt{a}}{۲}=۱\to a=۴$$

$$ax^{۲}+bx+c=a(x-۱)^{۲}=۴(x-۱)^{۲}=۴x^{۲}-۸x+۴\to\begin{cases} a=۴ \\ b=-۸\to a+۲b+c=-۸ \\ c=۴ \end{cases}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۶ گزینه ۴ درست است.

با توجه به نمودار داریم:

$$f(x^۲-۲x)=f\left((x-۱)^۲-۱\right)=f\left((-۱)^+\right)=۱ \quad \text{(مطلق)}$$

$$f(۲x-x^۲)=f\left(۱-(x-۱)^۲\right)=f(۱^-)=۱ \quad \text{(مطلق)}$$

بنابراین؛ حد خواسته‌شده برابر است با:

$$\lim_{x\to ۱} f\left(\frac{f(x^۲-۲x)+f(۲x-x^۲)}{۲}\right)=f\left(\frac{۱+۱}{۲}\right)=f(۱)=۲$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۷ گزینه ۳ درست است.

پیوستگی تابع را در $x=۲$ بررسی می‌کنیم:

$$f(۲)=۱۳$$

$$\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}(x^۲-۳)=۱$$

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x)=\lim_{x\to ۲^-}(۳x^۲+۱)=۱۳$$

پس تابع f در $x=۲$ ناپیوسته است. علاوه‌بر $x=۲$، نقاط ناپیوستگی تابع fof به‌صورت زیر است:

$$f(x)=\begin{cases} x\le ۲: ۳x^۲+۱=۲\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۳}\Rightarrow x=\pm\frac{\sqrt{۳}}{۳} \\ x>۲: x^۲-۳=۲\Rightarrow x^۲=۵\Rightarrow x=\pm\sqrt{۵}\xrightarrow{\text{با شرط } x>۲} x=\sqrt{۵}\end{cases}$$

بنابراین تابع fof در ۴ نقطه ناپیوسته است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۸

$$\lim_{x\to\frac{۲^+}{۳}} \frac{[۴\sin^۲ \pi x]+ax^۲}{\sqrt{۹x^۲-۱۲x+۴}}$$

وقتی $x\to\frac{۲^+}{۳}$ میل می‌کند، کمان به‌سمت $\left(\frac{۲\pi}{۳}\right)^+$ می‌رود که سینوس آن کمی از $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ کمتر است. (سینوس در اطراف $\frac{۲\pi}{۳}$ نزولی است.)

پس:

$$x\to\frac{۲^+}{۳}\to \sin\pi x\to(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^-\Rightarrow ۴\sin^۲\pi x\to ۴(\frac{۳}{۴})^-$$

یعنی درون براکت از ۳ کمی کمتر است و حاصل جزء صحیح می‌شود ۲.

از طرفی در مخرج $\sqrt{(۳x-۲)^۲}=|۳x-۲|$ را داریم که در سمت راست $x=\frac{۲}{۳}$ داخل قدرمطلق مثبت است و خودش بیرون می‌آید. تا اینجا داریم:

$$\lim_{x\to\frac{۲}{۳}} \frac{۲+ax^۲}{۳x-۲}=b$$

در $x=\frac{۲}{۳}$ چون حد مخرج صفر است، پس حد صورت هم باید صفر باشد:

$$\Rightarrow ۲+\frac{۴}{۹}a=۰\Rightarrow a=-\frac{۹}{۲}$$

و حاصل حد می‌شود:

$$\lim_{x\to\frac{۲}{۳}} \frac{۲-\frac{۹}{۲}x^۲}{۳x-۲}=\lim_{x\to\frac{۲}{۳}} \frac{\frac{۱}{۲}(۴-۹x^۲)}{-(۲-۳x)}$$

$$b=\lim_{x\to\frac{۲}{۳}} -\frac{۱}{۲}\frac{(۲-۳x)(۲+۳x)}{۲-۳x}=\lim_{x\to\frac{۲}{۳}} -\frac{۱}{۲}(۲+۳x)=-۲$$

و بنابراین:

$$[a-b]=[-\frac{۹}{۲}+۲]=\left[\frac{-۵}{۲}\right]=-۳$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۲۹۹

$$f(x)=\frac{[x]^{۲}-۱}{۲[-x]+k}$$

۳^{-} یعنی حدوداً $۲/۹$ و برای ۳^{+} هم $۳/۱$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\lim_{x\to ۳^{+}} f(x)=\frac{۳^{۲}-۱}{۲(-۴)+k}=\frac{۸}{k-۸}$$

$$\lim_{k\to ۳^{-}} f(x)=\frac{۲^{۲}-۱}{۲(-۳)+k}=\frac{۳}{k-۶}$$

پس با توجه به اینکه f در ۳ حد دارد:

$$\frac{۸}{k-۸}=\frac{۳}{k-۶}\Rightarrow ۸k-۴۸=۳k-۲۴\Rightarrow ۵k=۲۴\Rightarrow k=\frac{۲۴}{۵}=۴/۸$$

بنابراین:

$$f(x)=\frac{[x]^{۲}-۱}{۲[-x]+۴/۸}$$

و داریم:

$$[۴/۸]=۴$$

$$[-۴/۸]=-۵$$

$$f(k)=f(۴/۸)=\frac{۴^{۲}-۱}{۲(-۵)+۴/۸}=\frac{۱۵}{-۵/۲}=-\frac{۱۵۰}{۵۲}=-\frac{۷۵}{۲۶}\Rightarrow [f(k)]=[-\frac{۷۵}{۲۶}]=-۳$$

↓

بین ۲- و ۳-

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۰

$$\lim_{x\to -۲}\frac{x}{x^۳+ax+b}=+\infty$$

حد صورت ۲- است، پس مخرج باید در $x=-۲$ از دو طرف ۰^- شود؛ یعنی در تجزیه مخرج $(x+۲)^۲$ داریم و مخرج بر $x^۲+۴x+۴$ بخش‌پذیر است:

$$\begin{array}{l} x^۳+ax+b \quad \left|\begin{array}{c} x^۲+۴x+۴ \\ \hline x-۴ \end{array}\right. \\ \underline{x^۳+۴x^۲+۴x} \\ -۴x^۲+(a-۴)x+b \\ \underline{-۴x^۲-۱۶x-۱۶} \\ (a+۱۲)x+b+۱۶=۰ \Rightarrow a=-۱۲\ ,\ b=-۱۶ \end{array}$$

پس مخرج $(x-۴)(x+۲)^۲$ می‌شود که در ۲- از دو طرف ۰^- است.

بنابراین:

$$b-a=-۴$$

راه دوم: تجزیه مخرج $(x+۲)^۲(x+k)$ است و باید k طوری انتخاب شود که در ضرب $(x^۲+۴x+۴)(x+k)$ عبارت شامل $x^۲$ نداشته باشیم، پس:

$$kx^۲+۴x^۲=۰ \Rightarrow k=-۴$$

و حالا:

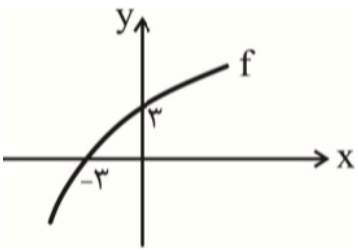
$$x^۳+ax+b=(x^۲+۴x+۴)(x-۴)$$

$$\left.\begin{array}{l} x \text{ ضریب}: ۴(-۴)+۴=-۱۲=a \\ \text{عدد ثابت}: ۴(-۴)=-۱۶=b \end{array}\right\} \Rightarrow b-a=-۴$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۱

f به شکل روبه‌رو است:



و حد راست و چپ آن در ۳- به‌ترتیب ۰^+ و ۰^- هستند، پس:

$$\text{حد راست}: \lim_{x\to(-۳)^+}\frac{x[x]+k}{f(x)}=\frac{(-۳)(-۳)+k}{۰^+}=\frac{k+۹}{۰^+}$$

برای اینکه حاصل حد $-\infty$ شود باید صورت منفی باشد پس $k+۹<۰$ و بنابراین $k<-۹$

$$\text{حد چپ}: \lim_{x\to(-۳)^-}\frac{x[x]+k}{f(x)}=\frac{(-۳)(-۴)+k}{۰^-}=\frac{k+۱۲}{۰^-}$$

برای رسیدن به‌حاصل $-\infty$ در این حد، باید $k+۱۲>۰$ باشد، پس: $k>-۱۲$ و بنابراین با توجه به شرط قبلی، عدد صحیح k می‌تواند -۱۱ یا -۱۰ باشد یعنی دو مقدار دارد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۲ ابتدا حد چپ را در $x=۲$ محاسبه می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^-}\frac{(-۱)^{[x]}}{f(x+۳)-f(x-۳)}=\frac{(-۱)^{[۲^-]}}{f(۵^-)-f\left((-۱)^-\right)}=\frac{(-۱)^{۱}}{f(۱^-)-f\left((-۱)^-\right)}=\frac{-۱}{۱^+-۱^-}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

حال حد راست را در $x=۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to ۲^+}\frac{(-۱)^{[x]}}{f(x+۳)-f(x-۳)}=\frac{(-۱)^{[۲^+]}}{f(۵^+)-f\left((-۱)^+\right)}=\frac{(-۱)^{۲}}{f(۱^+)-f\left((-۱)^+\right)}=\frac{۱}{۱^--۱^+}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$$

بنابراین؛ حد خواسته‌شده برابر با $-\infty$ است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۳ ابتدا حد داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$\lim_{x\to\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)^+}\frac{\sin ۴x}{(۱+\tan x)^۲}=\lim_{x\to\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)^+}\frac{\sin ۴x}{\left(۱+\frac{\sin x}{\cos x}\right)^۲}=\lim_{x\to\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)^+}\frac{\sin ۴x}{\left(\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}\right)^۲}$$

$$=\lim_{x\to\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)^+}\frac{\sin ۴x}{\frac{\cos^۲ x+\sin^۲ x+۲\sin x\cos x}{\cos^۲ x}}=\lim_{x\to\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)^+}\frac{\sin ۴x}{۱+\sin ۲x}\times\cos^۲ x$$

$$=\lim_{x\to\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)^+}\frac{\sin ۴x}{۱+\sin ۲x}\times\left(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲=\lim_{x\to\left(\frac{۳\pi}{۴}\right)^+}\frac{\sin ۴x}{۲(۱+\sin ۲x)}$$

با تغییر متغیر $x-\frac{۳\pi}{۴}=t$ خواهیم داشت:

$$\lim_{t\to ۰^+}\frac{\sin ۴\left(t+\frac{۳\pi}{۴}\right)}{۲\left(۱+\sin ۲(t+\frac{۳\pi}{۴})\right)}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{\sin(۳\pi+۴t)}{۲+۲\sin\left(\frac{۳\pi}{۲}+۲t\right)}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{-\sin ۴t}{۲-۲\cos ۲t}$$

$$=\lim_{t\to ۰^+}\frac{-۴\sin t\cos t\cos ۲t}{۴\sin^۲ t}=\lim_{t\to ۰^+}\frac{-\cos t\cos ۲t}{\sin t}=\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۴ برای اینکه حاصل حد در $x=a$ به $+\infty$ میل کند باید مخرج ریشهٔ مضاعف $x=a$ داشته باشد.

$$\frac{۱}{(x-a)(x^۲-b^۲)}=\frac{۱}{(x-a)(x-b)(x+b)}$$

یا $a=b$ است که کسر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{۱}{(x-a)^۲(x+a)}$$

یا $a=-b$ است که کسر به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\frac{۱}{(x-a)^۲(x+a)}$$

در مجموع $\frac{a}{b}=\pm ۱$ و دارای ۲ مقدار است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۵ مخرج تابع در $x=۱$ ریشهٔ مکرر از مرتبهٔ زوج دارد.

$$x^۳+ax+b=(x-۱)^۲(x-k)\Rightarrow x^۳+ax+b=(x^۲-۲x+۱)(x-k)$$
$$x^۳+ax+b=x^۳-kx^۲-۲x^۲+۲kx+x-k$$
$$x^۳+ax+b=x^۳-(k+۲)x^۲+(۲k+۱)x-k$$

با مقایسهٔ دو چندجمله‌ای به این نتیجه می‌رسیم که مقدار $k+۲$ برابر صفر است:

$$k+۲=۰\Rightarrow k=-۲$$

با جایگذاری مقدار به‌دست آمده داریم:

$$x^۳+ax+b=x^۳-۳x+۲\Rightarrow\begin{cases}a=-۳\\b=۲\end{cases}\Rightarrow ۲a+b=-۴$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۶ تابع خطی f را به‌صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم، داریم:

$$\begin{cases}f(-۳)=۰\\f(۶)=k\end{cases}\Rightarrow f(x)=a(x+۳)\Rightarrow a(۶+۳)=k\Rightarrow a=\frac{k}{۹}\Rightarrow f(x)=\frac{k}{۹}(x+۳)$$

با توجه به تعریف تابع وارون، $f^{-۱}(x)=\frac{۹}{k}x-۳$ خواهد بود، پس برای محاسبه حد داده‌شده داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf^{-۱}(x)}{f^۲(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(\frac{۹}{k}x-۳\right)}{\left(\frac{k}{۹}(x+۳)\right)^۲}\xrightarrow{\text{قاعده پرتوان}}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۹}{k}x^۲}{\frac{k^۲}{۸۱}x^۲}=\frac{۹^۳}{k^۳}=۱\Rightarrow k=۹$$

$$\Rightarrow f(x)=x+۳\Rightarrow f(k)=f(۹)=۹+۳=۱۲$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۷ در ابتدا صورت و مخرج را در مزدوج عبارت صورت ضرب می‌کنیم، داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^۳+۴x^۲+۲}-\sqrt{x^۳-x^۲+۳}}{\sqrt{۹x+\sqrt{۲x}}}\times\frac{\sqrt{x^۳+۴x^۲+۲}+\sqrt{x^۳-x^۲+۳}}{\sqrt{x^۳+۴x^۲+۲}+\sqrt{x^۳-x^۲+۳}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^۳+۴x^۲+۲)-(x^۳-x^۲+۳)}{\sqrt{(۹x+\sqrt{۲x})(x^۳+۴x^۲+۲)}+\sqrt{(۹x+\sqrt{۲x})(x^۳-x^۲+۳)}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{۵x^۲-۱}{\sqrt{۹x^۴+۳۶x^۳+\ldots}+\sqrt{۹x^۴-۹x^۳}}\xrightarrow{\text{قاعده پرتوان}}\lim_{x\to+\infty}\frac{۵x^۲}{۳x^۲+۳x^۲}=\frac{۵}{۶}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۸ حد داخل براکت در $-\infty$ برابر $\frac{k}{۲}$ است، پس باید $-۳<\frac{k}{۲}<-۲$ باشد و برای -۳ و -۲ هم باید صعودی یا نزولی بودن را بررسی کرد.

الف) اگر $-۶<k<-۴$ باشد، حاصل حد می‌شود $\left[\frac{k}{۲}\right]=-۳$

ب) برای $k=-۴$ درون براکت $\frac{-۴x-۲}{۲x+۱}$ است و براکتش هم -۲ است.

پ) برای $k=-۶$ تابع $\frac{-۶x-۲}{۲x+۱}$ برای $x<-\frac{۱}{۲}$ نزولی است. پس نمودارش در $-\infty$ به‌صورت -۳--------- است و حد براکتش می‌شود -۴.

پس فقط $-۶<k<-۴$ را می‌خواهیم که یک عدد صحیح -۵ دارد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۰۹ مخرج کسر باید به‌صورت $(x-۲)^۳$ باشد.

$$x^۳+ax^۲+bx+c=(x-۲)^۳=x^۳-۶x^۲+۱۲x-۸$$

در این صورت حاصل حد به $-\infty$ میل می‌کند.

$$\lim_{x\to۲}\frac{۲-x}{(x-۲)^۳}=\lim_{x\to۲}\frac{-۱}{(x-۲)^۲}=-\infty$$

بنابراین $a=-۶$ و $b=۱۲$ و $c=-۸$ و حاصل:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{-۶+۱۲}{-۸}=-\frac{۳}{۴}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۰

$$\lim_{x\to\frac{\pi^+}{۳}} \frac{\left[۴\cos^۲ x-۱\right]}{\tan x-۲\sin x}$$

در صورت کسر $۴\cos^۲ x-۱$ به‌ازای $x=\frac{\pi}{۳}$ صفر می‌شود $۴\left(\frac{۱}{۲}\right)^۲-۱=۰$ و چون $\cos^۲ x$ در اطراف $\frac{\pi}{۳}$ نزولی است در $\frac{\pi^+}{۳}$ مقدار آن از صفر کمتر است، پس حاصل صورت کسر $[۰^-]=-۱$ خواهد بود.

در مخرج $\tan\frac{\pi}{۳}-۲\sin\frac{\pi}{۳}$ صفر است. برای بررسی ۰^- یا ۰^+، آن را کمی تغییر می‌دهیم:

$$\tan x-۲\sin x=\frac{\sin x}{\cos x}-۲\sin x=\frac{\sin x-۲\sin x\cos x}{\cos x}=\frac{(۱-۲\cos x)\sin x}{\cos x}$$

در $\frac{\pi^+}{۳}$ مقدار $۱-۲\cos x$ مثبت است (چون $\cos x<\frac{۱}{۲}$)، پس جواب مخرج ۰^+ است و حد می‌شود $\frac{-۱}{۰^+}=-\infty$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۱

می‌دانیم که $۰\le x-[x]<۱$ است، پس برای تابع $f(x)=x-[x]-\frac{۳}{۲}$ داریم:

$$\frac{-۳}{۲}\le x-[x]-\frac{۳}{۲}<\frac{-۱}{۲}$$

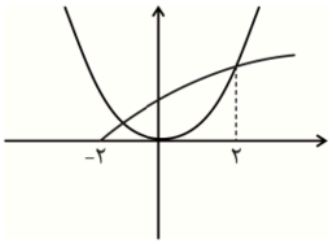
بنابراین خروجی تابع f، همواره عددی مخالف صفر است و در تابع gof، و در ضابطهٔ بالای تابع g قرار می‌گیرد. از طرفی خروجی f، عددی منفی است و تابع $y=\frac{|x|}{x}$ به‌ازای ورودی‌های منفی، همواره مقدار -۱ می‌دهد. پس نهایتاً با تابع ثابت $gof(x)=-۱$ طرفیم که همواره پیوسته است و هیچ ناپیوستگی ندارد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۲ به جای x عدد ۲ را جایگذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{۳x-۱}{x^۲-۲\sqrt{x+۲}} = \frac{۵}{۰} = \infty$$

نمودارهای دو تابع $y=x^۲$ و $y=۲\sqrt{x+۲}$ را نیز در یک دستگاه محور مختصات رسم می‌کنیم.



در همسایگی راست $x=۲$ مقادیر تابع $y=x^۲$ از تابع $y=۲\sqrt{x+۲}$ بزرگ‌تر است، یعنی:

$$x^۲-۲\sqrt{x+۲}>۰ \to \lim_{x\to ۲^+} \frac{۳x-۱}{x^۲-۲\sqrt{x+۲}} = \frac{۵}{۰^+} = +\infty$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۳ با جایگذاری $x=۲$ به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ می‌رسیم، برای رفع ابهام از روش تغییر متغیر استفاده می‌کنیم.

$$\begin{matrix} ۲^x = t \\ x\to ۲ \\ t\to ۴ \end{matrix} \Rightarrow \lim \frac{t+\frac{۸}{t}-۶}{\sqrt{\frac{۱}{t}-\frac{۲}{t}}} = \lim \frac{t^۲-۶t+۸}{\sqrt{t}-۲}$$

$$\lim \frac{(t-۴)(t-۲)}{(\sqrt{t}-۲)} = \lim \frac{(\sqrt{t}-۲)(\sqrt{t}+۲)(t-۲)}{(\sqrt{t}-۲)} = (۲+۲)\times(۴-۲) = ۸$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۴ به ۲ شرط زیر باید توجه کنیم:

۱) باید زیر رادیکال همواره بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد.

۲) مخرج کسر نباید ریشه داشته باشد.

شرط اول:

$$ax^۲ - ۴x + a \geq ۰ \rightarrow \begin{cases} \Delta \leq ۰ \\ a > ۰ \end{cases} \rightarrow ۱۶ - ۴a^۲ \leq ۰ \rightarrow ۴a^۲ \geq ۱۶ \rightarrow a \geq ۲ \text{ یا } a \leq -۲ \text{ , } a > ۰$$

اشتراک $\leftarrow a \geq ۲$

شرط دوم:

$$a\cos x + ۵ \neq ۰ \rightarrow \cos x \neq -\frac{۵}{a}$$

$$-۱ \leq \cos x \leq ۱ \rightarrow -\frac{۵}{a} < -۱ \text{ یا } -\frac{۵}{a} > ۱$$

$$\left|\frac{-۵}{a}\right| > ۱ \rightarrow \frac{۵}{|a|} > ۱ \rightarrow |a| < ۵ \rightarrow -۵ < a < ۵$$

با اشتراک شرط اول و دوم حدود a به‌صورت زیر است $۲ \leq a < ۵$ پس مقادیر طبیعی a عبارت‌اند از ۲ و ۳ و ۴ پس جواب ۳ مقدار طبیعی برای a است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۵ با توجه به نمودار تابع $f(x)$، $x = ۱$ و $x = ۲$ ریشه‌های صورت و $x = ۴$ به‌عنوان نقطهٔ توخالی، ریشهٔ مشترک صورت و مخرج است، پس ضابطهٔ آن برابر است با:

$$f(x) = \frac{(x-۱)(x-۲)(x-۴)}{x-۴} = \frac{x^۳ - ۷x^۲ + ۱۴x - ۸}{x-۴} \rightarrow \begin{cases} a = ۷ \\ b = ۱۴ \\ c = -۸ \end{cases}$$

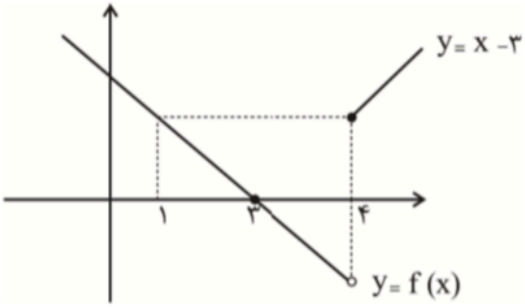
حد تابع در $x = ۴$ را نیز محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x \to ۴} \frac{(x-۱)(x-۲)(x-۴)}{x-۴} = ۳ \times ۲ = ۶ = k \rightarrow a + b + c + k = ۱۹$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۶

$$\lim_{x\to(-۱^+)}[f(۲-۲x)]=\lim_{x\to۴^-}[f(x)]$$



برای محاسبه حد چپ تابع در $x=۴$، باید معادلهٔ نیم‌خط سمت چپ را بنویسیم.

ابتدا دقت کنید که معادلهٔ نیم‌خط سمت راست، $y=x-۳$ است و از نقطهٔ $(۴,۱)$ می‌گذرد. با توجه به هم عرض بودن نقاطی به طول $x=۱$ و $x=۴$ در نمودار، پس نیم خط سمت چپ هم از نقطهٔ $(۱,۱)$ می‌گذرد و با توجه به این که نقطه $(۳,۰)$ هم بر آن واقع است، معادله آن به‌صورت $y=\frac{-۱}{۲}x+\frac{۳}{۲}$ است. پس:

$$\lim_{x\to۴^-}[f(x)]=\left[(\frac{-۱}{۲})^+\right]=-۱$$

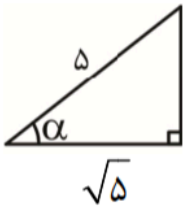
(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۷ گزینه ۱ درست است.

با استفاده از فرض سؤال داریم:

$$\sin(\frac{۵\pi}{۲}+\alpha)=\frac{\sqrt{۵}}{۵} \xrightarrow{\text{حذف } ۲\pi} \sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=\frac{\sqrt{۵}}{۵} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه فرضی داریم:



فیثاغورس: $۲\sqrt{۵} \rightarrow \sin\alpha=\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$

می‌دانیم که شیب هر خط برابر با تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور xها می‌سازد. پس:

$$m_{f^{-۱}}=\tan ۲\alpha=\frac{\sin ۲\alpha}{\cos ۲\alpha}=\frac{۲\sin\alpha\cos\alpha}{۲\cos^{۲}\alpha-۱}=\frac{۲(\frac{۲\sqrt{۵}}{۵})(\frac{\sqrt{۵}}{۵})}{۲(\frac{\sqrt{۵}}{۵})^{۲}-۱}=\frac{\frac{۴}{۵}}{\frac{-۳}{۵}}=\frac{-۴}{۳}$$

می‌دانیم دو تابع خطی که وارون هم هستند، شیب‌های برعکس هم دارند، پس $m_f=\frac{-۳}{۴}$ نهایتاً داریم:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|f(x)|}{f^{-۱}(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|\frac{-۳}{۴}x+h|}{\frac{-۴}{۳}x+h'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-۳}{۴}x+h}{\frac{-۴}{۳}x+h'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-۳}{۴}x}{\frac{-۴}{۳}x}=\frac{۹}{۱۶}$$

دقت کنید که در محاسبهٔ $\lim_{x\to-\infty}|\frac{-۳}{۴}x+h|$، داخل قدرمطلق مثبت است و خود عبارت از قدرمطلق، بیرون آمده است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۸ گزینه ۱ درست است.

ابتدا تابع f^{-1} را کمی ساده می‌کنیم تا وارون آن یعنی تابع f را راحت‌تر به‌دست آوریم:

$$f^{-1}(x)=x^3-6x^2+12x-7=(x-2)^3+1\xrightarrow{\text{وارون}}f(x)=\sqrt[3]{x-1}+2$$

پس حد موردنظر به‌صورت زیر است:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{\left((x-2)^3+1\right)-3(\sqrt[3]{x-1}+2)+8}{|x^2+x+[\frac{-5}{2}x]|}$$

ابتدا تکلیف براکت را روشن می‌کنیم:

$$\left[\frac{-5}{2}(2^+)\right]=[-5(1^+)]=[(-5^-)]=-6$$

حالا تکلیف قدرمطلق را معلوم می‌کنیم:

$$|x^2+x-6|=|(x-2)(x+3)|\xrightarrow{x=2^+}=(x-2)(x+3)=x^2+x-6$$

پس با حد زیر مواجه‌ایم:

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)^3-3\sqrt[3]{x-1}+3}{x^2+x-6}=\frac{0}{0}$$

از طریق حذف عامل صفرشوندهٔ $(x-2)$ یا از روش هوپیتال عمل می‌کنیم:

هوپیتال : $$\lim_{x\to 2}\frac{3(x-2)^2-3(\frac{1}{3})(x-1)^{\frac{-2}{3}}}{2x+1}=\frac{-1}{5}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۱۹ گزینه ۳ درست است.

اگر $n<1$ باشد داریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^n+|x|+1}{bx^n+|x-2|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{|x-2|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x-2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=\boxed{1}$$

اگر $n>1$ باشد:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^n+|x|+1}{bx^n+|x-2|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^n}{bx^n}=\boxed{\frac{a}{b}}$$

اگر $n=1$ باشد:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{ax^n+|x|+1}{bx^n+|x-2|}=\lim_{x\to+\infty}\frac{ax+x+1}{bx+x-2}\simeq\lim_{x\to+\infty}\frac{(a+1)x}{(b+1)x}=\boxed{\frac{a+1}{b+1}}$$

پس حاصل حد نمی‌تواند برابر با $\frac{a-1}{b-1}$ باشد.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۰ گزینه ۱ درست است.

اعداد صحیح، داخل براکت را صحیح کرده و تابع f در تمام آن‌ها ناپیوسته است، فقط $x=۲$ به‌دلیل ایجاد عامل صفرکننده در پشت براکت، تنها نقطهٔ صحیحی است که تابع f در آن پیوسته است. پس $b=۲$ می‌باشد و باید وضعیت پیوستگی تابع $g(x)=\left[\frac{x}{۲}\right]+[-x]$ را در $x=۲$ بررسی کنیم:

$$g(۲)=[۱]+[-۲]=۱-۲=-۱$$

$$\lim_{x\to ۲^+} g(x)=\left[۱^+\right]+\left[(-۲)^-\right]=۱-۳=-۲$$

$$\lim_{x\to ۲^-} g(x)=\left[۱^-\right]+\left[(-۲)^+\right]=۰-۲=-۲$$

بنابراین تابع در $x=۲$ حد دارد، ولی پیوسته نیست.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۱ گزینه ۲ درست است.

از قاعدهٔ هوپیتال استفاده می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x^۲+۳}-۲}{\sqrt[۳]{x}-۱}\overset{HOP}{=\!=}\lim_{x\to ۱}\frac{\frac{۲x}{۲\sqrt{x^۲+۳}}}{\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۳}}=\frac{۳}{۲}$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۲ گزینه ۲ درست است.

ابتدا حد تابع $f(x)$ را در $+\infty$ محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۲+۳x+۱}{x^۲-۵x+۶}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۲(x^۲-۵x+۶)+۱۳x-۱۱}{x^۲-۵x+۶}=$$

$$\lim_{x\to+\infty} ۲+\frac{۱۳x-۱۱}{x^۲-۵x+۶}=۲+۰^+=۲^+$$

کافی است برای محاسبهٔ مقدار حد تابع $y=fof(x)$ در $+\infty$، حد راست تابع $f(x)$ را در $x=۲$ محاسبه کنیم.

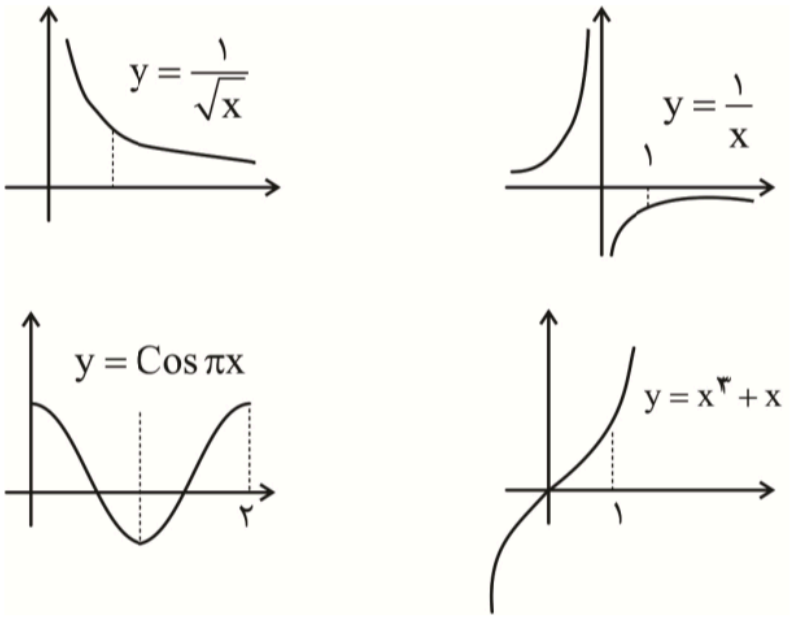
$$\lim_{x\to+\infty} fof(x)=\lim_{x\to ۲^+} f(x)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{۲x^۲+۳x+۱}{(x-۲)(x-۳)}=\frac{۱۵}{۰^+\times -۱}=\frac{۱۵}{۰^-}=-\infty$$

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)

۳۲۳ گزینه ۳ درست است.

برای اینکه تابع $y=[f(x)]$ در $x=۱$ فقط از چپ پیوسته باشد، به شرط پیوسته بودن خود تابع در $x=۱$، باید تابع f در همسایگی $x=۱$ اکیداً نزولی باشد و مقدار $f(۱)$ عددی صحیح باشد.

با توجه به نمودارهای توابع زیر:



فقط تابع $y=\frac{۱}{\sqrt{x}}$ در همسایگی $x=۱$ اکیداً نزولی است.

(سنجش ۱۴۰۲-۱۴۰۳ - متوسط)